# Direkte adaptive Regelstrategien für die diskrete Regelung von Mehrgrössensystemen

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Abteilung für Elektrotechnik

an der Ruhr-Universität Bochum

von

**Volker Hahn**

Dortmund

Bochum 1983

UNIV.
LEEDS

# Direkte adaptive Regelstrategien für die diskrete Regelung von Mehrgrössensystemen

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Abteilung für Elektrotechnik

an der Ruhr-Universität Bochum

von

Volker Hahn

Dortmund

Bochum 1993

# Direkte adaptive Regelstrategien für die diskrete Regelung von Mehrgrössensystemen

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Abteilung für Elektrotechnik

an der Ruhr-Universität Bochum

von

**Volker Hahn**

Dortmund

Bochum 1983

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung an der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen danke ich sehr herzlich für die wertvollen Anregungen, die zahlreichen Diskussionen und die großzügige Förderung während der Durchführung der Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Weber gilt mein besonderer Dank für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse und die Übernahme des Mitberichts.

Ohne die Unterstützung, die ich von mehreren Seiten erhalten habe, wäre diese Arbeit in der vorliegenden Form nicht entstanden. Der Bayer AG, Leverkusen, danke ich für die Ermöglichung der Experimente an der Destillationskolonne. Ferner danke ich den Herren T. Fresewinkel, R. Stoffer, U. Nadolph und P. Wiemer, die im Rahmen von Studien- und Diplomarbeiten zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein Dank geht auch an alle meine Kollegen, die mir zu vielen fruchtbaren Gesprächen Gelegenheit gaben. Für die gute Zusammenarbeit auf dem Gebiet der Parameteroptimierung möchte ich mich insbesondere bei Herrn Chang-long Wang bedanken. Nicht zuletzt gilt mein Dank Frau P. Kiesel, Frau H. Hupp und Frau E. Schmitt für die sorgfältige Reinschrift des Manuskripts und Frl. H. Vollbrecht und Frau M.-L. Schmücker für die gewissenhafte Anfertigung der Zeichnungen.

Dissertation eingereicht am : 19.10.1983
Tag der mündlichen Prüfung : 12.12.1983
Referent : Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen
Korreferent : Prof. Dr.-Ing. W. Weber

INHALTSVERZEICHNIS


Seite

1. EINFÜHRUNG 1

2. ENTWURF DES GRUNDREGELKREISES FÜR EINE BEGRENZTE KLASSE VON REGELSTRECKEN MIT GLEICHER ANZAHL VON EIN- UND AUSGÄNGEN 5

2.1. Parametrisierung der Regelstrecke 5

2.2. Entwurf des Reglers 13

2.2.1. Entwurfsziele und Vorbemerkungen 13

2.2.2. Darstellung und Voraussetzungen der Regelstrecke 14

2.2.3. Das Parallelmodell 19

2.2.4. Das Stellgesetz 20

2.3. Diskussion des Stör- und Führungsverhaltens 29

2.3.1. Führungsverhalten 29

2.3.2. Störverhalten 29

2.3.2.1. Deterministische Störungen 30

2.3.2.2. Stochastische Störungen - Der Minimum-Varianz-Regler 35

2.4. Stabilität und Entkopplung 45

2.4.1. Stabilität 45

2.4.2. Entkopplung 47

2.5. Zusammenfassung 49

3. DER GRUNDREGELKREIS MIT KORREKTURNETZWERK FÜR EINE ERWEITERTE KLASSE VON REGELSTRECKEN MIT GLEICHER ANZAHL VON EIN- UND AUSGÄNGEN 51

3.1. Einführung des Korrekturnetzwerks 51

3.2. Der Entwurf des Reglers 54

Seite

3.3. Diskussion des dynamischen Verhaltens der Regelgrößen 58

3.3.1. Mathematische Ableitung des dynamischen Verhaltens 58

3.3.2. Stabilität 62

3.3.3. Regler mit stationärer Genauigkeit 63

3.3.4. Entkopplung und Stellverhalten 68

3.4. Exkurs über "nichtminimalphasige" Mehrgrößensysteme 72

3.5. Entwurf des Korrekturnetzwerks 76

3.5.1. Entwurf im Frequenzbereich 76

3.5.1.1. Der Eingrößenfall 76

3.5.1.2. Der Mehrgrößenfall 82

3.5.1.3. Diskussion des sequentiellen Entwurfsalgorithmus' 99

3.5.2. Entwurf des Korrekturnetzwerks mit Hilfe von Parameteroptimierungsmethoden 103

3.6. Zusammenfassung 113

4. Der adaptive Regelkreis für eine Mehrgrössen-Regelstrecke mit unbekannten Parametern 115

4.1. Einführung und Problemstellung 115

4.2. Entwurf eines garantiert stabilen adaptiven Mehrgrößenreglers 118

4.3. Diskussion des adaptiven Mehrgrößenreglers nach Abschnitt 4.2 133

4.3.1. Einige Bemerkungen zur Konvergenz der Reglerparameter - Das Identifikationsproblem im ungestörten System 133

4.3.2. Die Beziehung des Adaptionsalgorithmus' nach Satz 4.1 zu anderen Verfahren 138

4.3.3. Notwendige a priori-Kenntnisse 140

4.3.3.1. A priori-Kenntnisse über die Struktur der Regelstrecke 140

Seite

4.3.3.2. A priori-Kenntnisse über die Parameter der Regelstrecke 147

4.4. Die Adaption im gestörten Regelkreis 154

4.4.1. Das Stabilitätsproblem 154

4.4.2. Die erste Modifikation des Adaptionsalgorithmus' 156

4.4.3. Die zweite Modifikation des Adaptionsalgorithmus' unter Verwendung eines Reglers mit explizitem I-Verhalten 167

4.4.4. Die Biasschätzung und einige weitere Modifikationen 181

4.4.4.1. Die Biasschätzung 181

4.4.4.2. Das Verfahren von Kreisselmeier und Narendra 184

4.4.4.3. Die Verwendung von inkrementellen Schätzmodellen 185

4.4.5. Reduzierung des Einflusses stochastischer Störungen durch Einsatz variabler Gewichtungsfaktoren 191

4.4.6. Schätzung der Störpolynommatrix 210

4.4.7. Empfehlungen 217

4.5. Einige Modifikationen des adaptiven Reglers nach Abschnitt 4.2 219

4.5.1. Störgrößenaufschaltung meßbarer Störungen 219

4.5.2. Beeinflussung des Konvergenzverhaltens der natürlichen Fehler durch Einführung zusätzlicher Filter 225

4.6. Implementierung des adaptiven Mehrgrößenreglers auf dem Prozeßrechner 231

4.7. Zusammenfassung 239

5. Experimentelle Erprobung des Regelkonzepts an Pilotanlagen 242

5.1. Vorbemerkungen 242

Seite

5.2. Adaptive Regelung eines Turbogenerators 242

5.2.1. Die Regelstrecke und prinzipielle Anforderungen an die Regelung 242

5.2.2. Entwurf des Reglers und experimentelle Ergebnisse 248

5.3. Adaptive Regelung einer Destillationskolonne 267

5.3.1. Beschreibung der Regelstrecke und Anforderungen an die Regelung 267

5.3.2. Experimentelle Ergebnisse 270

5.4. Abschließende Beurteilung des adaptiven Reglers 279

6. Zusammenfassung und Ausblick 281

Literaturverzeichnis 285

Anhang

A 1 Lösung der Polynomgleichung

$P_1(z^{-1}) = z^{-k}\, X(z^{-1}) + Y(z^{-1})\, P_2(z^{-1})$ 292

A 2 Beweis von Satz 3.3 298

A 3 Satz A 3.1 302

A 4 Stabilisierung der sich nach dem sequentiellen Entwurfsalgorithmus für das Korrekturnetzwerk ergebenden Übertragungsfunktion $\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})$ nach Gl.(3.104) mittels meßbarer Ein- und Ausgangssignale der Regelstrecke 304

A 5 Beweis von Satz 3.4 310

A 6.1 Beweis von Satz 4.1 315

A 6.2 Beweis von Satz 4.2 319

A 7 Beweis von Satz 4.4 327

A 8 Zur Bestimmung der Parameter der Regelstrecke mit Hilfe der adaptiv eingestellten Reglerparameter 332

Seite

A 9 Eine modifizierte Realisierung des adaptiven Reglers nach Abschnitt 4.2 337

A 10 Mathematische Notation 346

A 10.1 Grundsätzliche Bemerkungen 346

A 10.2 Zusammenstellung der wichtigsten Formelzeichen 347

# 1. Einführung

Bei vielen praktischen Problemstellungen der Regelungstechnik existieren für den Entwurf des Reglers nur grobe Prozeßmodelle. Dies gilt insbesondere für das Gebiet der Verfahrenstechnik, wo zwar das statische Verhalten einer Anlage häufig gut bekannt ist, das dynamische Verhalten jedoch vielfach nur grob abgeschätzt werden kann. Die entworfenen Regler müssen dann oft bei der Inbetriebnahme einer Anlage im on-line-Betrieb nachjustiert werden, wobei dieses Nachjustieren manuell durch systematisches Probieren aufgrund gesammelter Erfahrungen erfolgt. Häufig verändern verfahrenstechnische Anlagen auch im Laufe der Zeit ihr dynamisches Verhalten z. B. durch veränderte Umwelteinflüsse oder durch Alterung. Dies erfordert von Zeit zu Zeit ebenfalls ein manuelles Nachjustieren signifikanter Reglerparameter durch einen Operator. Da das manuelle Nachjustieren eine einfache und intuitiv überschaubare Reglerstruktur bedingt, werden in der Industrie sehr oft lediglich Eingrößen-PID-Regler eingesetzt, selbst dann, wenn der zu regelnde Prozeß ein stark verkoppeltes Mehrgrößensystem darstellt.

Um den Entwurf und vor allen Dingen auch die Inbetriebnahme des Reglers zu vereinfachen, ist der Einsatz selbsteinstellender, also adaptiver Regler von Vorteil. Ein solcher Regler paßt sich auch an ein verändertes dynamisches Verhalten des zu regelnden Prozesses automatisch an, so daß ein Nachjustieren nicht erforderlich ist.

Bei mechanischen und elektrischen Systemen ist die Modellbildung im allgemeinen nicht so problematisch wie bei verfahrenstechnischen Anlagen. Die sich ergebenden Prozeßmodelle sind hier allerdings häufig stark nichtlinear. Dies führt für verschiedene Arbeitspunkte und verschiedene Lastzustände auf linearisierte Prozeßmodelle mit unterschiedlichen Parametern. Der adaptive Regler bietet hier die Möglichkeit, sich an unterschiedliche Arbeitsbedingungen anzupassen, um so ein annähernd gleich gutes dynamisches Verhalten in allen Arbeitspunkten einzustellen.

Auf dem Gebiet der Eingrößensysteme existiert heute eine Vielzahl von leistungsfähigen adaptiven Verfahren, die z. T. bereits auf Mehrgrößensysteme erfolgreich übertragen worden sind. Diese Verfahren lassen sich in zwei Hauptklassen einteilen: in die indirekten oder expliziten Verfahren und in die direkten oder impliziten Verfahren (Åström (1980)). "Indirekt" bzw. "explizit" bedeutet, daß mit Hilfe eines rekursiven Schätzverfahrens "explizit" ein mathematisches Modell der Regelstrecke identifiziert und mit diesem Modell der Regler in jedem Abtastschritt neu entworfen bzw. nachgestellt wird. Dies führt auf eine "indirekte" Einstellung der Reglerparameter. "Direkt" bzw. "implizit" besagt, daß mit Hilfe meßbarer Signale "direkt" der Regler so eingestellt wird, daß sich ein gewünschtes dynamisches Verhalten des Regelkreises ergibt. In diesem Fall werden praktisch die Reglerparameter identifiziert, die natürlich wiederum "implizit" Informationen über die Parameter der Regelstrecke enthalten. Indirekte Verfahren haben den Vorteil, daß für die Reglersynthese jedes beliebige Entwurfsverfahren, das automatisiert ablaufen kann (d. h. das nicht der menschlichen Intuition bedarf), anwendbar ist. Solche Verfahren sind in jüngster Zeit von Schumann (1982) untersucht worden. Direkte Verfahren bieten den Vorteil, daß der Zwischenschritt des Reglerentwurfs, d. h. der Berechnung der Reglerparameter mit Hilfe der geschätzten Streckenparameter, entfällt und damit z. B. bei der Realisierung Rechenzeit gespart werden kann. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit direkten Verfahren.

Direkte Verfahren bauen immer auf Kompensationsreglerentwürfen auf. Dabei wird das gewünschte dynamische Verhalten des gesamten Regelkreises durch ein mathematisches Modell in Form einer Übertragungsfunktion bzw. einer Übertragungsmatrix spezifiziert. Bei den sogenannten "Verfahren mit Vergleichsmodell" (vgl. z. B. Landau (1979)) wird das mathematische Modell für das gewünschte dynamische Verhalten des Regelkreises auch explizit - eben als "Vergleichsmodell" - realisiert. Die Ausgangsgrößen dieses Modells bilden die Referenz für die Regelgrößen. Der Regler wird dann so abgeglichen, daß die Differenz zwischen den Regelgrößen und den Ausgangsgrößen des Vergleichsmodells verschwindet. Die sogenannten

direkten "Self-Tuning"-Regler (vgl. z. B. Åström (1980)) benutzen ein implizites Modell. Für das Standard-Verfahren nach Åström und Wittenmark (1973) ist dies das Minimum-Varianz-Modell für den geschlossenen Regelkreis. Obwohl die Verfahren mit Vergleichsmodell und die direkten "Self-tuning"-Regler von unterschiedlichen Ausgangspositionen entwickelt worden sind, sind sie physikalisch äquivalent und lassen sich ineinander umrechnen (Hahn et al. (1983)).

Kompensationsregler haben die unangenehme Eigenschaft, daß sie bei Regelstrecken, deren Übertragungsfunktion bzw. Übertragungsmatrix keine stabile Inverse besitzt, nicht anwendbar sind. Solche Regelstrecken werden als nichtminimalphasig bezeichnet. Für diese Klasse von Regelstrecken führen Kompensationsregler auf ein instabiles Verhalten des geschlossenen Kreises. In der vorliegenden Arbeit wird nun ein Verfahren vorgeschlagen, das auch für solche Prozesse anwendbar ist. Der Regler besteht dabei aus dem Kompensator und einem linearen Filter, dem sogenannten Korrekturnetzwerk, das eine zusätzliche Rückführung der Stellgrößen bewirkt. Der Kompensator wird jetzt nicht direkt auf die Regelstrecke, sondern auf ein minimalphasiges Ersatzsystem ausgelegt. Diese Konstruktion hat den Vorteil, daß wiederum ein direkter und damit ein schneller adaptiver Regelalgorithmus anwendbar ist. Die sich ergebende Struktur ist sehr ähnlich zu dem Prinzip des sogenannten "verallgemeinerten Minimum-Varianz-Reglers" nach Clarke und Gawthrop (1979) bzw. Koivo (1980). In der vorliegenden Arbeit werden die Möglichkeiten und Grenzen, die diese Struktur bietet, eingehend untersucht. Da adaptive Regler aufgrund ihrer Komplexität sinnvoll nur mit einem Digitalrechner zu realisieren sind, wird dazu die diskrete Betrachtungsweise herangezogen.

Im einzelnen ist die Arbeit folgendermaßen aufgebaut. Kapitel 2 und Kapitel 3 beschäftigen sich ausschließlich mit dem Entwurf des linearen Reglers bei bekannter Regelstrecke. In Kapitel 2 wird insbesondere eine Parametrisierung des mathematischen Modells der Regelstrecke entwickelt, die es erlaubt, das Verfahren auch für die Regelung von Prozessen mit verschiedenen Totzeiten in den einzelnen Teilsystemen anzuwenden. In Kapitel 4 wird die Er-

weiterung zu dem adaptiven Regler durchgeführt. Der Algorithmus für die Einstellung der Reglerparameter wird mit der Stabilitätstheorie entworfen. Besondere Aufmerksamkeit wird der Frage gewidmet, welchen Einfluß Störungen auf die Einstellung der Reglerparameter haben. Gerade dieses Problem ist in der Literatur bisher nur wenig behandelt worden. Kapitel 5 demonstriert die erfolgreiche praktische Anwendung des entwickelten Verfahrens für die Regelung von zwei Pilotanlagen, einem Turbogeneratorsatz und einer Destillationskolonne.

Für eine tiefergehende theoretische Analyse des Verfahrens ist leider ein gewisser mathematischer Aufwand unumgänglich. Um die Lesbarkeit zu erhöhen, sind wichtige Zwischenergebnisse und Ableitungen zu sogenannten "Aussagen" oder "Schlußfolgerungen" zusammengefaßt worden. Das Formelverzeichnis im Anhang A10 dient dem gleichen Zweck. Als "Gegengewicht" zu der mathematischen Behandlung wird im Kapitel 5 versucht, die bei dem Einsatz des hier vorgestellten Reglers gemachten Erfahrungen qualitativ zu vermitteln.

# 2. Entwurf des Grundregelkreises für eine begrenzte Klasse von Regelstrecken mit gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen

## 2.1. Parametrisierung der Regelstrecke

In diesem Abschnitt wird eine lineare zeitinvariante Regelstrecke mit q Ein- und q Ausgangsgrößen betrachtet, deren Übertragungsverhalten durch die q x q Übertragungsmatrix

$$\underline{G}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{B}_{11}(z^{-1})}{\tilde{A}_{11}(z^{-1})} z^{-d_{11}} & \cdots & \frac{\tilde{B}_{1q}(z^{-1})}{\tilde{A}_{1q}(z^{-1})} z^{-d_{1q}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\tilde{B}_{q1}(z^{-1})}{\tilde{A}_{q1}(z^{-1})} z^{-d_{1q}} & \cdots & \frac{\tilde{B}_{qq}(z^{-1})}{\tilde{A}_{qq}(z^{-1})} z^{-d_{qq}} \end{bmatrix}$$

$$= \{ \frac{\tilde{B}_{ij}(z^{-1})}{\tilde{A}_{ij}(z^{-1})} z^{-d_{ij}} \} \; ; \; i,j = 1, \ldots, q \qquad (2.1)$$

in P-kanonischer Form beschrieben werden kann, d. h.

$$\underline{y}(z) = \underline{G}(z^{-1}) \; \underline{u}(z) \quad . \qquad (2.2)$$

Der q x 1 Vektor $\underline{y}(z)$ enthält die $\mathcal{Z}$-Transformierten der Regelgrößen, im q x 1 Vektor $\underline{u}(z)$ sind die $\mathcal{Z}$-Transformierten der Stellgrößen zusammengefaßt. Die Übertragungsmatrix $\underline{G}(z^{-1})$ wird nun durch folgenden Algorithmus in ein Produkt von Polynommatrizen und reinen Verzögerungsgliedern zerlegt:

1. Schritt:

Die Matrix $\underline{G}(z^{-1})$ wird pro Zeile auf den jeweiligen (Zeilen-) Hauptnenner

$$A_i(z^{-1}) = \underset{1 \le j \le q}{kgV} \{ \tilde{A}_{ij}(z^{-1}) \} \; ; \quad i = 1, \ldots, q \qquad (2.3)$$

gebracht und die Zählerpolynome werden entsprechend erweitert. Dann läßt sich $\underline{G}(z^{-1})$ in die Faktoren

$$\underline{G}(z^{-1}) = \underline{A}^{-1}(z^{-1})\ \underline{B}^{(1)}(z^{-1}) \tag{2.4a}$$

mit

$$\underline{A}(z^{-1}) = \text{diag}\ \{A_i(z^{-1})\}\ ; \quad i = 1,\ldots,q \tag{2.4b}$$

$$\underline{B}^{(1)}(z^{-1}) = \{B_{ij}^{(1)}(z^{-1})\ z^{-d_{ij}}\}\ ; \quad i,j = 1,\ldots,q \tag{2.4c}$$

$$B_{ij}^{(1)}(z^{-1}) = \tilde{B}_{ij}(z^{-1})\ \frac{A_i(z^{-1})}{\tilde{A}_{ij}(z^{-1})}\ ; \qquad i,j = 1,\ldots,q \tag{2.4d}$$

zerlegen. Die Polynommatrix $\underline{A}(z^{-1})$ ist eine Diagonalmatrix, die die Zeilenhauptnenner (das sind die kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nennerpolynome einer Zeile) der Übertragungsmatrix $\underline{G}(z^{-1})$ enthält. Die Matrix $\underline{B}^{(1)}(z^{-1})$ wird aus den erweiterten Zählerpolynomen gebildet. Aufgrund von Gl.(2.3) ist der Faktor $A_i(z^{-1})/\tilde{A}_{ij}(z^{-1})$ ohne Rest teilbar und stellt daher ein Polynom dar.

2. Schritt:

Pro Zeile wird die kleinste Schrittverzögerung

$$d_i^a = \min_{1\le j\le q}\ \{d_{ij}\}\ ; \quad i = 1,\ldots,q \tag{2.5}$$

gesucht und die Matrix

$$\underline{D}_a(z^{-1}) = \text{diag}\ \{z^{-d_i^a}\} \tag{2.6}$$

gebildet. Für $\underline{G}(z^{-1})$ erhält man dann

$$\underline{G}(z^{-1}) = \underline{A}^{-1}(z^{-1})\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}^{(2)}(z^{-1}) \tag{2.7a}$$

mit

$$\underline{B}^{(2)}(z^{-1}) = \{B_{ij}^{(2)}(z^{-1})\} = \{B_{ij}^{(1)}(z^{-1})\ z^{-(d_{ij}-d_i^a)}\}\ ; \quad i,j = 1,\ldots,q \tag{2.7b}$$

Die Matrix $\underline{D}_a(z^{-1})$ enthält nur Schrittverzögerungen (Totzeiten) und keine Parameter der Regelstrecke. Aufgrund von Gl. (2.5) ist

$$d_{ij} - d_i^a \geq 0 \quad \text{für alle} \quad i,j = 1,\ldots,q \quad , \tag{2.8}$$

so daß $\underline{B}^{(2)}(z^{-1})$ nur aus kausalen Termen besteht.

3. Schritt:

Pro Spalte der Polynommatrix $\underline{B}^{(2)}(z^{-1})$ wird die kleinste Schrittverzögerung

$$d_j^e = \min_{1 \leq i \leq q} \{d_{ij} - d_i^a\} \tag{2.9}$$

gesucht. Aufgrund von Gl.(2.8) gilt stets

$$d_j^e \geq 0 \quad \text{für alle} \quad j = 1,\ldots,q \quad . \tag{2.10}$$

Es wird dann die Matrix

$$\underline{D}_e(z^{-1}) = \text{diag}\{z^{-d_i^e}\}; \quad i = 1, \ldots, q \tag{2.11}$$

aufgebaut. $\underline{D}_e(z^{-1})$ ist ebenfalls eine Diagonalmatrix.

Nun wird die Polynommatrizengleichung

$$\underline{B}^{(2)}(z^{-1}) = \underline{B}(z^{-1})\ \underline{D}_e(z^{-1}) \tag{2.12}$$

für die Matrix $\underline{B}(z^{-1})$ gelöst. Mit

$$\underline{B}(z^{-1}) = \{B_{ij}(z^{-1})\} \ ; \quad i,j = 1,\ldots,q \tag{2.13}$$

ergibt sich aus Gl.(2.7b), Gl.(2.11) und Gl.(2.12)

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(2)}(z^{-1}) &= B_{ij}^{(1)}(z^{-1})\ z^{-(d_{ij}-d_i^a)} \\ &= B_{ij}(z^{-1})\ z^{-d_j^e}; \quad i,j = 1, \ldots, q \, . \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dies führt für die unbekannten Elemente $B_{ij}(z^{-1})$ der Matrix $\underline{B}(z^{-1})$ auf die einfache Beziehung

$$B_{ij}(z^{-1}) = B_{ij}^{(1)}(z^{-1})\ z^{-(d_{ij}-d_i^a-d_j^e)} \ ; \ i,j = 1, \ldots q \, . \tag{2.15}$$

Nach Gl.(2.9) gilt $d_{ij} - d_i^a - d_j^e \geq 0$ für alle i,j, so daß $B_{ij}(z^{-1})$ ein kausales Polynom ist.

Mit Gl.(2.12) erhält man letztendlich entsprechend Gl.(2.7a) für die Darstellung der Regelstrecke

$$\underline{G}(z^{-1}) = \underline{A}^{-1}(z^{-1})\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\ \underline{D}_e(z^{-1}) \quad . \tag{2.16}$$

Der hier angegebene Algorithmus liefert aufgrund der Zeilenhauptnennerbildung im allgemeinen nicht die parameterminimale Darstellung für die Polynommatrizen $\underline{A}(z^{-1})$ und $\underline{B}(z^{-1})$. Die vorgeschlagene Beschreibung der Regelstrecke ermöglicht jedoch eine flexible Totzeitbehandlung und aufgrund der Diagonalform von $\underline{A}(z^{-1})$ einen einfachen Entwurf des Reglers. Bevor nun weiter auf die Eigenschaften der Streckendarstellung nach Gl.(2.16) eingegangen wird, sollen einige Beispiele zur Veranschaulichung der Totzeitbehandlung folgen:

*Beispiel B2.1:*

Gegeben ist die Übertragungsmatrix

$$\underline{G}(z) = \begin{bmatrix} z^{-1} & z^{-2} \\ z^{-4} & 0.5z^{-6} \end{bmatrix} \quad .$$

Der 1. Schritt des Algorithmus entfällt bei diesem Beispiel, d. h.

$$\underline{A}(z^{-1}) = \underline{I}$$

$$\underline{B}^{(1)}(z^{-1}) = \underline{G}(z^{-1}) \quad .$$

Der 2. Schritt liefert

- nach Gl.(2.5):

$$d_1^a = 1 \ ; \quad d_2^a = 4$$

- nach Gl.(2.6):

$$\underline{D}_a(z^{-1}) = \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z^{-4} \end{bmatrix}$$

- nach Gl.(2.7b):

$$\underline{B}^{(2)}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} \\ 1 & 0.5z^{-2} \end{bmatrix} .$$

Im 3. Schritt erhält man

- nach Gln.(2.9):

$$d_1^e = 0 \quad ; \quad d_2^e = 1 \quad ,$$

- nach Gl.(2.11):

$$\underline{D}_e(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} ,$$

- nach Gl.(2.15):

$$B_{11}(z^{-1}) = 1$$

$$B_{12}(z^{-1}) = 1$$

$$B_{21}(z^{-1}) = 1$$

$$B_{22}(z^{-1}) = 0.5z^{-1}.$$

Daraus folgt:

$$\underline{G}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.5z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} .$$

*Beispiel B2.2:*

Es wird die Übertragungsmatrix

$$\underline{G}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} z^{-1} & z^{-1} & z^{-2} \\ z^{-3} & z^{-3} & z^{-3}+z^{-4} \\ z^{-1} & \alpha z^{-1}+z^{-2} & z^{-2} \end{bmatrix}$$

betrachtet. Auch in diesem Beispiel ist wieder

$$\underline{A}(z^{-1}) = \underline{I}$$

und

$$\underline{B}^{(1)}(z^{-1}) = \underline{G}(z^{-1}) \quad .$$

Für die Matrix $\underline{D}_a(z^{-1})$ erhält man entsprechend Gl.(2.5) und Gl. (2.6)

$$\underline{D}_a(z^{-1}) = \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \quad ,$$

für $\underline{D}_e(z^{-1})$ ergibt sich nach Gl.(2.9) und Gl.(2.11)

$$d_1^e = d_2^e = d_3^e = 0 \quad ,$$

$$\underline{D}_e(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Der Algorithmus Gl.(2.15) zur Berechnung von $\underline{B}(z^{-1})$ liefert:

$$\underline{B}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & z^{-1} \\ 1 & 1 & 1+z^{-1} \\ 1 & \alpha+z^{-1} & z^{-1} \end{bmatrix} \quad .$$

Damit erhält man in diesem Fall die Zerlegung

$$\underline{G}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & z^{-1} \\ 1 & 1 & 1+z^{-1} \\ 1 & \alpha+z^{-1} & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Die Darstellung der Regelstrecke nach Gl.(2.16)

$$\underline{G}(z^{-1}) = \underline{A}^{-1}(z^{-1})\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\ \underline{D}_e(z^{-1})$$

ergibt das Blockschaltbild nach Bild 2.1. Die Matrix $\underline{D}_e(z^{-1})$ enthält die eingangsseitigen, die Matrix $\underline{D}_a(z^{-1})$ die ausgangsseitigen Schrittverzögerungen. Der Gedanke, von der Übertragungsmatrix $\underline{G}(z^{-1})$ eingangs- und ausgangsseitige Verzögerungen abzuspalten, klingt schon bei Schumann (1982) an, allerdings ohne daß dort ein Algorithmus für die Zerlegung der Matrix $\underline{G}(z^{-1})$ angegeben wird. Auch Ohkawa und Yonezawa (1982) benutzen eine solche Darstellung. Aber auch sie stellen keine Beziehung zwischen einer beliebigen vorgegebenen Übertragungsmatrix in P-kanonischer Form und der von ihnen gewählten Darstellung mit Polynommatrizen her.

Die minimale eingangsseitige Schrittverzögerung

$$d^e_{min} = \min_{1 \le j \le q} \{d^e_j\} = 0 \qquad (2.17)$$

ist stets gleich Null. Dies ergibt sich direkt aus dem Algorithmus zur Bestimmung von $\underline{D}_e(z^{-1})$. Aufgrund von Gl.(2.5) enthält die Matrix $\underline{B}^{(2)}(z^{-1})$ nach Gl.(2.7b) in jeder Zeile mindestens ein verzögerungsfreies Element, d. h.

$$d_{ij} - d^a_i = 0 \quad \text{für mindestens ein } j \text{ und alle } i \quad .$$

Daher existiert mindestens eine Spalte, für die $d^e_j$ nach Gl.(2.9) gleich Null ist. Es ist nun besonders bei realen Systemen häufig der Fall, daß alle eingangsseitigen Verzögerungen gleich Null sind, d. h.

$$d^e_1 = d^e_2 = \ldots = d^e_q = 0 \quad . \qquad (2.18)$$

In diesem Fall ist die Matrix $\underline{D}_e(z^{-1})$ nach Gl.(2.11) gleich der Einheitsmatrix.

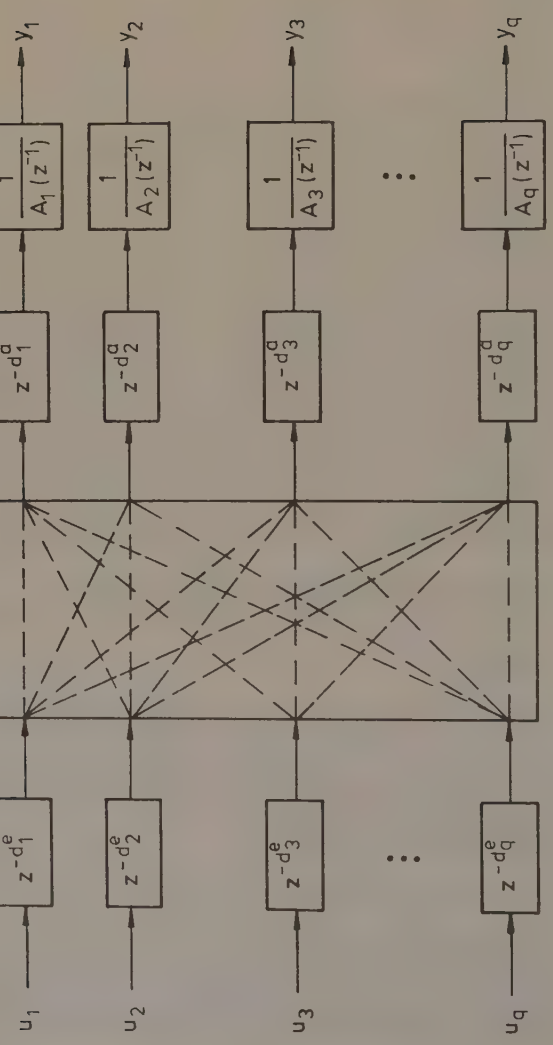



Bild 2.1. Blockschaltbild der Regelstrecke in der Darstellung nach Gl.(2.16)

## 2.2. Entwurf des Reglers

### 2.2.1. Entwurfsziele und Vorbemerkungen

Die Grundstruktur des Regelkreises ist in Bild 2.2 dargestellt. Der Regler soll so entworfen werden, daß

1. im Fall ohne Störungen die Regelgrößen $\underline{y}$ den Ausgangsgrößen $\underline{y}_M$ eines zum Regelkreis parallel geschalteten fest eingestellten Referenzmodells, das in dieser Arbeit kurz als "Parallelmodell" bezeichnet wird, exakt folgen und

2. unabhängig davon eine Beeinflussung der Stördynamik möglich ist.

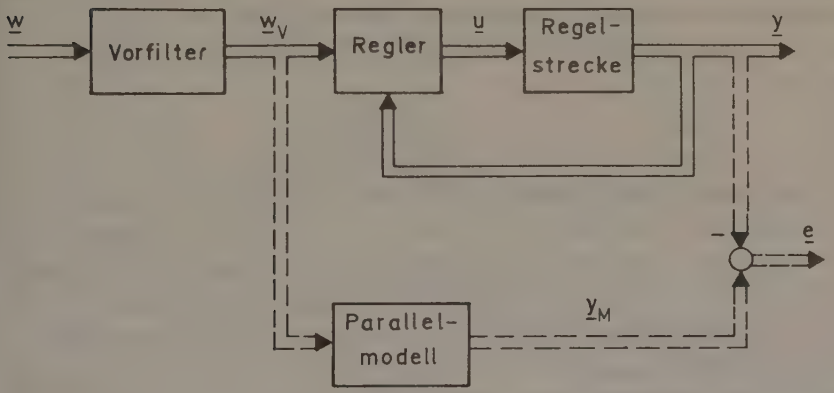



Bild 2.2. Grundstruktur des Regelkreises

Die Ausgangsgrößen $\underline{y}_M$ des Parallelmodells bilden gewissermaßen die Referenztrajektorien für die Regelgrößen $\underline{y}$. Die Abweichung der Regelgrößen von den Modellausgangsgrößen beschreibt der "natürliche" Fehlervektor

$$\underline{e}(z) = \underline{y}_M(z) - \underline{y}(z) \quad . \tag{2.19}$$

Die erste Forderung, die der Regler erfüllen soll, kann somit mathematisch durch die "Kompensationsbedingung"

$$\underline{e}(z) \equiv \underline{0} \quad \text{für den störungsfreien Fall} \tag{2.20}$$

ausgedrückt werden.

Es ist klar, das der Ausgangsvektor $\underline{y}_M$ des Parallelmodells dieselbe Dimension qx1 wie der Vektor $\underline{y}$ der Regelgrößen aufweisen muß. Da es sinnvoll ist, für q Regelgrößen auch q Sollwerte $\underline{w}$ vorzusehen, wird das dynamische Verhalten sowohl des Vorfilters als auch des Parallelmodells durch Übertragungsmatrizen der Dimension qxq festgelegt. Es ist selbstverständlich, daß für eine sinnvolle Regelung das Vorfilter und das Parallelmodell asymptotisch stabil sein müssen.

## 2.2.2. Darstellung und Voraussetzungen der Regelstrecke

Das dynamische Verhalten der Regelgrößen läßt sich bei Berücksichtigung von Störungen im Frequenzbereich durch die Vektorgleichung

$$\underline{A}(z^{-1})\ \underline{y}(z) = \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\ \underline{D}_e(z^{-1})\ \underline{u}(z) + \underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z) \tag{2.21}$$

mit

$$\underline{A}(z^{-1}) = \underline{I} + \underline{A}^*(z^{-1})z^{-1} = \mathrm{diag}\{A_i(z^{-1})\};\ i = 1,\ldots,q \tag{2.22a}$$

$$\underline{B}(z^{-1}) = \underline{B}_0 + \underline{B}^*(z^{-1})z^{-1} \tag{2.22b}$$

$$\underline{D}_a(z^{-1}) = \mathrm{diag}\{z^{-d_i^a}\},\ i = 1,\ldots,q \tag{2.22c}$$

$$\underline{D}_e(z^{-1}) = \mathrm{diag}\{z^{-d_i^e}\};\ i = 1,\ldots,q \tag{2.22d}$$

$$\underline{C}(z^{-1}) = \underline{I} + \underline{C}^*(z^{-1})z^{-1} = \mathrm{diag}\{C_i(z^{-1})\};\ i = 1,\ldots,q \tag{2.22e}$$

beschreiben. Der Vektor $\underline{\varepsilon}(z)$ mit der Dimension qx1 beschreibt mittelwertfreies weißes Rauschen mit den Eigenschaften

$$E\{\underline{\varepsilon}(k)\} = \underline{0},\quad E\{\underline{\varepsilon}(k)\ \underline{\varepsilon}^T(k-l)\} = \underline{0} \text{ für } l \neq 0 \tag{2.23}$$

$$E\{\underline{\varepsilon}(k)\ \underline{\varepsilon}^T(k)\} = \underline{\Sigma}_\varepsilon,\ \underline{\Sigma}_\varepsilon = \underline{\Sigma}_\varepsilon^T \geq 0\ . \tag{2.24}$$

Der qx1 Vektor $\underline{z}(z)$ enthält deterministische Störungen, für die als stationäres Verhalten

$$\lim_{k\to\infty} z_i(k) = z_i^* \, k^{n_{zi}}; \quad i = 1, \ldots, q \tag{2.25}$$

mit

$$n_{zi} = 0,1,2,\ldots \quad ; \quad i = 1,\ldots,q \tag{2.26}$$

angenommen wird, d. h. für große Zeiten nehmen die Störungen die Form eines Sprunges ($n_{zi} = 0$), einer Rampe ($n_{zi} = 1$), einer Parabel ($n_{zi} = 2$), kurz eines Polynoms $n_{zi}$-ter Ordnung (im Zeitbereich) an.

Die qxq Polynommatrix $\underline{A}(z^{-1})$ wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit als normierte Diagonalmatrix angesetzt. Die Polynommatrix $\underline{C}(z^{-1})$ mit der Dimension qxq wird so gewählt, daß die statistischen Eigenschaften der stochastischen Störsignale

$$\underline{r}_\varepsilon(z) = \underline{A}^{-1}(z^{-1})\underline{C}(z^{-1})\underline{\varepsilon}(z) \tag{2.27}$$

mit den statistischen Eigenschaften der an den Ausgängen der ungeregelten Regelstrecke meßbaren stochastischen Signalanteile übereinstimmen. Da $\underline{A}(z^{-1})$ als normierte Diagonalmatrix angesetzt wird, genügt es ohne Einschränkung der Allgemeinheit, auch die Matrix $\underline{C}(z^{-1})$, die im folgenden als Störpolynommatrix bezeichnet wird, als normierte Diagonalmatrix anzusetzen. Die Diagonalmatrizen $\underline{D}_a(z^{-1})$ und $\underline{D}_e(z^{-1})$ enthalten nur die Ausgangs- und Eingangsverzögerungen der Regelstrecke. Wie man aus einer gegebenen Übertragungsmatrix $\underline{G}(z^{-1})$ die Polynommatrizen $\underline{A}(z^{-1})$, $\underline{B}(z^{-1})$ und die Verzögerungsmatrizen $\underline{D}_a(z^{-1})$, $\underline{D}_e(z^{-1})$ gewinnt, ist in Abschnitt 2.1 erläutert worden. Das Blockschaltbild der gestörten Regelstrecke zeigt Bild 2.3.

Für den Entwurf des Reglers muß die Regelstrecke folgende Voraussetzungen erfüllen:

Voraussetzung V2.1: Die Regelstrecke enthalte keine sprungfähigen Anteile, d. h.

$$d_i^a \geq 1 \quad \text{für alle} \quad i = 1,\ldots,q \quad . \tag{2.28}$$

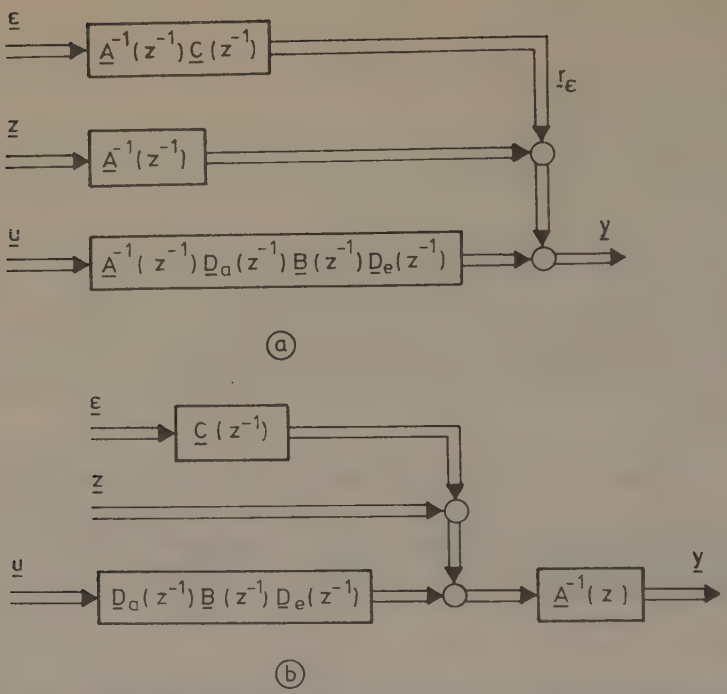



Bild 2.3. Zwei mögliche Blockschaltbilder für das dynamische Verhalten der gestörten Regelstrecke nach Gl.(2.21)

Diese Voraussetzung ist notwendig, um algebraische Schleifen zu vermeiden.

Voraussetzung V2.2: Es gelte

$$\det \underline{B}_0 \neq 0 \tag{2.29}$$

Diese Voraussetzung garantiert die Realisierbarkeit des Reglers. Der Algorithmus, der in Abschnitt 2.1 angegeben wird, gewährleistet leider nicht, daß durch die entsprechende Totzeitzerlegung Gl.(2.29) immer erfüllt ist. Dies wird am Beispiel B2.2 deutlich. Für $\alpha = 1$ gilt dort

$$\underline{B}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} z^{-1}$$

$$= \underline{B}_0 + \underline{B}^*(z^{-1})\, z^{-1} , \tag{2.30}$$

d. h. det $\underline{B}_0 = 0$. Zwischen der Determinante von $\underline{B}_0$ und der Determinante von $\underline{B}(z^{-1})$ besteht entsprechend Gl.(2.22b) folgender Zusammenhang:

$$\det \underline{B}(z^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \ldots + \beta_{n_B} z^{-n_B} \tag{2.31a}$$

$$\det \underline{B}_0 = \beta_0 \quad . \tag{2.31b}$$

Besitzt das Polynom det $\underline{B}(z^{-1})$ also keinen Absolutkoeffizienten, so ist Voraussetzung V2.2 nach Gl.(2.29) verletzt. Dennoch kann evtl. durch eine weitere Transformation Voraussetzung V2.2 wieder erfüllt werden. Hierzu wird der Fall

$$\det \underline{B}(z^{-1}) = (\beta_l + \beta_{l+1} z^{-1} + \ldots + \beta_{n_B} z^{-(n_B-l)}) z^{-l} \quad ,$$

mit

$$\beta_l \neq 0 \tag{2.32}$$

betrachtet, d. h. alle Koeffizienten $\beta_0, \ldots, \beta_{l-1}$ der Determinante von $\underline{B}(z^{-1})$ sind gleich Null. Findet man nun eine Transformationsmatrix $\underline{T}(z^{-1})$ mit den Eigenschaften

1. $\underline{B}_T(z^{-1}) = \underline{B}(z^{-1})\ \underline{T}^{-1}(z^{-1})$ (2.33a)

besteht nur aus kausalen Termen

und

2. $\det \underline{T}(z^{-1}) = z^{-l}$ , (2.33b)

so gilt nach Gl.(2.32)

$$\det \underline{B}_{TO} = \det \left(\underline{B}(z^{-1}) \cdot \underline{T}^{-1}(z^{-1})\right)\Big|_{z^{-1}=0} =$$

$$= \beta_l \neq 0 \quad . \tag{2.34}$$

Durch die transformierte Matrix $\underline{B}_{TO}$ wird also Voraussetzung V2.2 erfüllt. Mit $\underline{D}_{eT}(z^{-1}) = \underline{T}(z^{-1})\underline{D}_e(z^{-1})$ erhält man dann die zu Gl.(2.16) äquivalente Darstellung $\underline{G}(z^{-1}) = \underline{A}^{-1}(z^{-1})\underline{D}_a(z^{-1})\underline{B}_T(z^{-1})\underline{D}_{eT}(z^{-1})$. Auch dies soll kurz am Beispiel B2.2 veranschaulicht werden. Dort gilt für $\alpha = 1$

$$\det \underline{B}(z^{-1}) = z^{-1}.$$

Mit

$$\underline{T}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z^{-1} & z^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det T(z^{-1}) = z^{-1}$$

folgt:

$$\underline{B}_T(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1+z^{-1} \\ 1 & 0 & z^{-1} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z^{-1}$$

$$= \underline{B}_{TO} + \underline{B}_T^*(z^{-1})\, z^{-1}$$

und

$$\underline{D}_{eT}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z^{-1} & z^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

dabei gilt: $\det \underline{B}_{TO} = -1$. Durch die Transformation mit der Matrix $\underline{T}(z^{-1})$ wird die zusätzliche Schrittverzögerung 1, die bei der Bildung der Determinante von $\underline{B}(z^{-1})$ entsteht, von der $\underline{B}$-Matrix abgespalten und der Verzögerungsmatrix $\underline{D}_e$ zugeschlagen.

Voraussetzung V2.2 ist überhaupt nur dann zu erfüllen, wenn

$$\det \underline{B}(z^{-1}) \not\equiv 0 \qquad (2.35)$$

ist, d. h. wenn nach Gl.(2.32) ein $\beta_1$ mit $\beta_1 \neq 0$ existiert. Gl. (2.35) bedeutet, daß die Matrix $\underline{B}(z^{-1})$ invertierbar ist. Da die Matrix $\underline{A}(z^{-1})$ aufgrund der Normierung und die Matrizen $\underline{D}_a(z^{-1})$ und $\underline{D}_e(z^{-1})$ aufgrund ihrer speziellen Struktur stets invertierbar sind, ist Gl.(2.35) entsprechend Gl.(2.16) genau dann erfüllt, wenn die Inverse $\underline{G}^{-1}(z^{-1})$ der Übertragungsmatrix existiert, oder

physikalisch ausgedrückt, wenn die Regelstrecke entkoppelbar ist. In der Tat wird durch den Regler auch eine vollständige Entkopplung erreicht, wie später noch gezeigt wird.

Voraussetzung V2.3: Die Determinante von $\underline{B}(z^{-1})$ habe keine Wurzeln außerhalb des Einheitskreises der z-Ebene:

$$\det \underline{B}(z^{-1}) \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1 . \tag{2.36}$$

Voraussetzung V2.3 hat die Bedeutung einer Stabilitätsforderung. Sie entspricht der Minimalphasigkeitsbedingung bei Eingrößensystemen (Schmid (1979), Landau (1979), Monopoli (1974), Nöth (1982)). Viele reale Systeme, besonders solche mit ausgeprägtem Tiefpaßcharakter, erfüllen Gl.(2.36) nicht. In Abschnitt 3 wird daher eine Methode zum Reglerentwurf angegeben, bei der die Voraussetzung V2.3 fallengelassen werden kann.

### 2.2.3. Das Parallelmodell

Für das Parallelmodell wird das dynamische Verhalten beschrieben durch die Vektorgleichung

$$\underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{y}_M(z) = z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}_M(z^{-1})\ \underline{w}_v(z) \tag{2.37}$$

mit

$$\underline{A}_M(z^{-1}) = \underline{I} + \underline{A}^*_M(z^{-1})z^{-1} = \mathrm{diag}\{\underline{A}_{Mi}(z^{-1})\};\ i = 1,\ldots,q \tag{2.38a}$$

$$\underline{A}_{Mi}(z^{-1}) \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1 ;\ \ i = 1,\ldots,q \tag{2.38b}$$

$$\bar{d}_e = \max_{1\leq i\leq q} \{d_i^e\} \tag{2.38c}$$

vorgegeben. Auch die Polynommatrix $\underline{A}_M(z^{-1})$ wird als normierte Diagonalmatrix angesetzt, die nur aus Hurwitzpolynomen besteht. Durch die Berücksichtigung der maximalen Eingangsverzögerung $\bar{d}_e$ und der Ausgangsverzögerung $\underline{D}_a(z^{-1})$ wird ein kausales Stellgesetz ermöglicht. Die Matrix $\underline{B}_M(z^{-1})$ ist eine beliebige Polynommatrix. $\underline{A}_M(z^{-1})$ und $\underline{B}_M(z^{-1})$ haben die Dimension qxq. $\underline{w}_v(z)$ ist das Ausgangssignal des stabilen Vorfilters $\underline{G}_v(z^{-1})$

$$\underline{w}_V(z^{-1}) = \underline{G}_V(z^{-1})\ \underline{w}(z) \tag{2.39}$$

(vgl. Bild 2.2). $\underline{G}_V(z^{-1})$ hat ebenfalls die Dimension qxq.

## 2.2.4. Das Stellgesetz

Das Stellgesetz wird zunächst so entworfen, daß die Kompensationsbedingung Gl.(2.20) für den störungsfreien Fall, d. h. für $\underline{\varepsilon}(z) \equiv \underline{0}$ und $\underline{z}(z) \equiv \underline{0}$ erfüllt ist. Anschließend wird dann in Abschnitt 2.3 das Störverhalten in Verbindung mit dem Führungsverhalten diskutiert. Die Kompensationsbedingung liefert sowohl die Parameter als auch die Struktur des Reglers.

Das dynamische Verhalten der natürlichen Fehler $\underline{e}(z)$ kann nach Gl. (2.19) und Gl.(2.37) durch die Beziehung

$$\begin{aligned}\underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{e}(z) &= \underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{y}_M(z) - \underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{y}(z)\\ &= z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}_M(z^{-1})\ \underline{w}_V(z)\\ &\quad - \underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{y}(z)\end{aligned} \tag{2.40}$$

beschrieben werden. Addiert man auf die rechte Seite von Gl.(2.40) den Term

$$\underline{A}(z^{-1})\ \underline{y}(z) - \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\ \underline{D}_e(z^{-1})\ \underline{u}(z)$$
$$- \underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) - \underline{z}(z) \equiv 0\ ,$$

der nach Gl.(2.21) identisch Null ist, so folgt

$$\begin{aligned}\underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{e}(z) &= z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}_M(z^{-1})\ \underline{w}_V(z)\\ &\quad + \underline{\Delta A}^*(z^{-1})z^{-1}\ \underline{y}(z) - \underline{D}_a(z^{-1})\underline{B}(z^{-1})\underline{D}_e(z^{-1})\underline{u}(z)\\ &\quad - \underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) - \underline{z}(z)\end{aligned} \tag{2.41}$$

mit

$$\begin{aligned}\underline{\Delta A}^*(z^{-1}) &= (\underline{A}(z^{-1}) - \underline{A}_M(z^{-1}))\cdot z\\ &= \underline{A}^*(z^{-1}) - \underline{A}_M^*(z^{-1})\ .\end{aligned} \tag{2.42}$$

Definiert man nun die q Hilfsgrößen $\underline{u}_d(z)$ mit

$$z^{-\bar{d}_e}\,\underline{u}_d(z) = \underline{D}_e(z^{-1})\,\underline{u}(z)\,, \tag{2.43}$$

so erhält man aus Gl.(2.41)

$$\begin{aligned}\underline{A}_M(z^{-1})\,\underline{e}(z) = {} & z^{-\bar{d}_e}\,\underline{D}_a(z^{-1})\,\underline{B}_M(z^{-1})\,\underline{w}_V(z) \\ & + \underline{\Delta A}^*(z^{-1})z^{-1}\,\underline{y}(z) - \underline{D}_a(z^{-1})\underline{B}(z^{-1})z^{-\bar{d}_e}\,\underline{u}_d(z) \\ & - \underline{C}(z^{-1})\,\underline{\varepsilon}(z) - \underline{z}(z)\quad .\end{aligned} \tag{2.44}$$

Die Stellgrößen $\underline{u}(z)$ sind entsprechend Gl.(2.43) und Gl.(2.38c) eine kausale Funktion der Hilfsgrößen $\underline{u}_d(z)$, da gilt

$$\underline{u}(z) = z^{-\bar{d}_e}\,\underline{D}_e^{-1}(z^{-1})\,\underline{u}_d(z)\quad . \tag{2.45}$$

Dies führt mit Gl.(2.22d) im Zeitbereich auf die Beziehung

$$u_i(k) = u_{di}(k-\bar{d}_e + d_i^e);\quad i = 1, \ldots, q\,.$$

Da $\bar{d}_e$ das Maximum aller $d_i^e$ ist, folgt

$$d_i^e - \bar{d}_e \leq 0,$$

so daß für die Synthese des Stellsignals $u_i(k)$ nur die aktuelle oder vergangene Hilfsgröße $u_{di}(k-\bar{d}_e + d_i^e)$ benötigt wird.

Gelingt es nun, für die Hilfsgrößen $\underline{u}_d(z)$ eine kausale Beziehung abzuleiten, so ist entsprechend Gl.(2.45) die Kausalität auch bezüglich der Stellgrößen $\underline{u}(z)$ gesichert.

Die Kompensationsbedingung Gl.(2.20) ist für verschwindende Anfangswerte genau dann erfüllt, wenn

$$\underline{A}_M(z^{-1})\,\underline{e}(z) \equiv \underline{0} \quad \text{für} \quad \underline{\varepsilon}(z) \equiv \underline{0},\ \underline{z}(z) \equiv \underline{0}\,. \tag{2.46}$$

ist, da das Parallelmodell entsprechend Gl.(2.38b) asymptotisch stabil ist. Gl.(2.46) führt mit Gl.(2.44) für die Hilfssignale $\underline{u}_d(z)$ auf die implizite Beziehung

$$\underline{B}(z^{-1})\underline{u}_d(z) = \underline{B}_M(z^{-1})\underline{w}_V(z) + z^{\bar{d}_e}\,\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})z^{-1}\,\underline{\Delta A}^*(z^{-1})\underline{y}(z)\ . \quad (2.47)$$

Der Störterm $\underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z)$ kann bei der Synthese des Stellgesetzes nicht berücksichtigt werden, da die Störungen als nicht meßbar vorausgesetzt werden. Mit Gl.(2.47) erhält man aus Gl.(2.44

$$\underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{e}(z) = -\underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) - \underline{z}(z)\quad , \quad (2.48)$$

so daß die Kompensationsbedingung für den störungsfreien Fall erfüllt ist.

Leider ist der Term $z^{\bar{d}_e}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ z^{-1}\ \underline{\Delta A}^*(z^{-1})\ \underline{y}(z)$ für $\bar{d}_e > 0$ oder $d_i^a > 1$ für (mindestens) ein i ($i\in\{1,\ldots,q\}$) nicht kausal. In diesem Fall wird dieser Term durch eine geeignete Prädiktion ersetzt. Hierzu wird die Beziehung

$$z^{\bar{d}_e}\,\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ z^{-1}\ \underline{\Delta A}^*(z^{-1})\ \underline{y}(z) = \underline{S}(z^{-1})\ \underline{y}(z) + \underline{R}(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\ z^{-1}\ \underline{u}_d(z) + \underline{e}_p(z) \quad (2.49)$$

mit den zunächst noch unbestimmten Polynommatrizen $\underline{S}(z^{-1})$ und $\underline{R}(z^{-1})$ der Dimension qxq und dem ebenfalls noch nicht bestimmten Prädiktionsfehlervektor $\underline{e}_p(z)$ der Dimension qx1 zugrunde gelegt. Die Signale

$$\underline{f}_y(z) = \underline{S}(z^{-1})\ \underline{y}(z) + \underline{R}(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\ z^{-1}\ \underline{u}_d(z)$$

stellen die Prädiktion für die Signale

$$z^{\bar{d}_e-1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{\Delta A}^*(z^{-1})\ \underline{y}(z)$$

auf der Grundlage aller zum aktuellen Zeitpunkt k vorhandenen Meßwerte dar. Es handelt sich dabei um eine Prädiktion um $\bar{d}_e - 1 + d_i^a$ ($i\in\{1,\ldots,q\}$) Abtastschritte. Die Polynommatrizen $\underline{S}(z^{-1})$ und $\underline{R}(z^{-1})$ sind so zu wählen, daß der Prädiktionsfehlervektor $\underline{e}_p(z)$ nur von den nicht meßbaren Störungen abhängt. Setzt man auf der rechten Seite von Gl.(2.49) für den Ausdruck $\underline{B}(z^{-1})z^{-1}\ \underline{u}_d(z)$ den nach Gl.(2.21) und Gl.(2.43) identischen Term

$$z^{\bar{d}_e-1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\,[\underline{A}(z^{-1})\underline{y}(z) - \underline{C}(z^{-1})\underline{\varepsilon}(z) - \underline{z}(z)]$$

ein, so ergibt sich

$$z^{\bar{d}_e-1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{\Delta A}^*(z^{-1})\ \underline{y}(z) = \underline{S}(z^{-1})\ \underline{y}(z)$$
$$+\underline{R}(z^{-1})z^{\bar{d}_e-1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ [\underline{A}(z^{-1})\ \underline{y}(z) - \underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) - \underline{z}(z)]$$
$$+\underline{e}_p(z)\quad . \tag{2.50}$$

Mit dem Ansatz

$$\underline{e}_p(z) = \underline{R}(z^{-1})z^{\bar{d}_e-1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ [\underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z)] \tag{2.51}$$

für den Prädiktionsfehlervektor erhält man aus Gl.(2.50)

$$z^{\bar{d}_e-1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{\Delta A}^*(z^{-1})\ \underline{y}(z) =$$
$$= \left[\underline{S}(z^{-1}) + \underline{R}(z^{-1})z^{\bar{d}_e-1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{A}(z^{-1})\right]\ \underline{y}(z)\quad .$$

Diese Beziehung führt für die Polynommatrizen $\underline{S}(z^{-1})$ und $\underline{R}(z^{-1})$ auf die Identität

$$z^{\bar{d}_e-1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{\Delta A}^*(z^{-1}) =$$
$$= \underline{S}(z^{-1}) + \underline{R}(z^{-1})z^{\bar{d}_e-1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{A}(z^{-1})\quad . \tag{2.52}$$

Da die Matrizen $\underline{A}(z^{-1})$ und $\underline{A}_M(z^{-1})$ Diagonalmatrizen sind, gilt dies auch für die Polynommatrix $\underline{\Delta A}^*(z^{-1})$ nach Gl.(2.42), d. h.

$$\underline{\Delta A}^*(z^{-1}) = \text{diag}\ \{\Delta A_i^*(z^{-1})\}\ ;\quad i = 1,\ldots,q\quad . \tag{2.53}$$

Da auch $\underline{D}_a(z^{-1})$ eine Diagonalmatrix ist, können ohne Einschränkung der Allgemeinheit auch $\underline{R}(z^{-1})$ und $\underline{S}(z^{-1})$ als Diagonalmatrizen

$$\underline{R}(z^{-1}) = \text{diag}\ \{R_i(z^{-1})\}\ ;\quad i = 1,\ldots,q \tag{2.54a}$$

$$\underline{S}(z^{-1}) = \text{diag}\ \{S_i(z^{-1})\}\ ;\quad i = 1,\ldots,q \tag{2.54b}$$

angesetzt werden. Gl.(2.52) zerfällt dann in q Gleichungen der Form

$$z^{\bar{d}_e+d_i^a-1}\ \Delta A_i^*(z^{-1}) = S_i(z^{-1}) + R_i(z^{-1})\ z^{d_e+d_i^a-1}\ A_i(z^{-1})\ ;$$

$$i = 1,\ldots,q$$

bzw.

$$\Delta A_i^*(z^{-1}) = z^{-(\bar{d}_e+d_i^a-1)}\ S_i(z^{-1}) + R_i(z^{-1})\ A_i(z^{-1})\ ;\ i = 1,\ldots,q\ . \tag{2.55}$$

Gleichungen vom Typ der Gl.(2.55) sind in der Theorie der Eingrößensysteme häufig untersucht worden. Sie tauchen immer bei Verwendung eines Prädiktors auf (Nöth (1982)). Die Identitätsgleichung, die beim Minimum-Varianz-Regler eine bedeutende Rolle spielt, ist eine Gleichung dieses Typs (vgl. Åström und Wittenmark (1973), Nöth (1982), Åström (1970)). In Anhang A1 ist ein Berechnungsschema für die Koeffizienten der Polynome $S_i(z^{-1})$ und $R_i(z^{-1})$ angegeben. Haben die Polynome $R_i(z^{-1})$ dabei den minimal möglichen Grad $\bar{d}_e + d_i^a - 2$, so ist die Lösung eindeutig, und es ergibt sich ein einfaches rekursives Berechnungsschema. Allgemein gilt nach Anhang A1, Gl.(A1.6) und Gl.(A1.8), für die Grade der Polynome $S_i(z^{-1})$ und $R_i(z^{-1})$

$$n(R_i) = \bar{d}_e + d_i^a - 2 + n_{Ri};\ n_{Ri} = 0,1,2,\ldots;\ i = 1,\ldots,q \tag{2.56a}$$

$$n(S_i) = \max\{n(\Delta A_i^*)-(\bar{d}_e + d_i^a - 1),\ n(A_i) + n_{Ri} - 1\};$$

$$i = 1,\ldots,q. \tag{2.56b}$$

Wählt man $n_{Ri} > 0$, so gewinnt man Freiheitsgrade für den Entwurf hinzu, mit denen man zusätzliche Forderungen, die an die Regelung gestellt werden, erfüllen kann (vgl. dazu Abschnitt 2.3.2.1).

Ist $\bar{d}_e = 0$ und $d_i^a = 1$, so kann

$$R_i(z^{-1}) \equiv 0 \tag{2.57}$$

gesetzt werden.

Setzt man Gl.(2.49) in Gl.(2.44) unter Berücksichtigung von Gl. (2.51) ein, so ergibt sich

$$\underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{e}(z) = z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\cdot\Big[\underline{B}_M(z^{-1})\ \underline{w}_V(z) + \underline{S}(z^{-1})\ \underline{y}(z) - (\underline{I} - \underline{R}(z^{-1})z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\ \underline{u}_d(z)\Big] - (\underline{I} - \underline{R}(z^{-1})z^{-1})\cdot(\underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z)) \qquad (2.58)$$

für das dynamische Verhalten des Fehlervektors $\underline{e}(z)$, wobei die Kommutativität der Diagonalmatrixprodukte ausgenutzt worden ist. Entsprechend der Kompensationsbedingung Gl.(2.46) führt Gl.(2.58) für die Hilfsgrößen $\underline{u}_d(z^{-1})$ auf die implizite Beziehung

$$(\underline{I} - \underline{R}(z^{-1})z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\ \underline{u}_d(z) = \underline{B}_M(z^{-1})\ \underline{w}_V(z) + \underline{S}(z^{-1})\ \underline{y}(z)\ . \qquad (2.59)$$

Gl.(2.59) ist in jedem Fall eine kausale Beziehung. Das dynamische Verhalten des Fehlervektors

$$\underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{e}(z) = -(\underline{I} - \underline{R}(z^{-1})z^{-1})\ (\underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z)) \qquad (2.60)$$

ist dann nur noch von den nicht meßbaren Störungen abhängig. Die rechten Seiten von Gl.(2.48) und Gl.(2.60) unterscheiden sich genau um den zeitverschobenen Prädiktionsfehlervektor $z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{e}_p(z)$ nach Gl.(2.51).

Gl.(2.59) führt mit Gl.(2.39) und Gl.(2.43) auf das explizite Stellgesetz

$$\underline{u}_d(z) = \underline{B}_0^{-1}\Big[\underline{B}_M(z^{-1})\ \underline{G}_V(z^{-1})\ \underline{w}(z) + (-\underline{B}^*(z^{-1}) + \underline{R}(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}))z^{-1}\ \underline{u}_d(z) + \underline{S}(z^{-1})\ \underline{y}(z)\Big] \qquad (2.61a)$$

$$\underline{u}(z) = z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_e^{-1}(z^{-1})\ \underline{u}_d(z)\ . \qquad (2.61b)$$

Aufgrund der Voraussetzung V2.2 bezüglich der Regelstrecke ist die Invertierbarkeit der Matrix $\underline{B}_0$ gewährleistet.

In Bild 2.4 ist das Blockschaltbild des Regelsystems dargestellt. Es handelt sich dabei um eine ganz allgemeine "feedforward-feed-

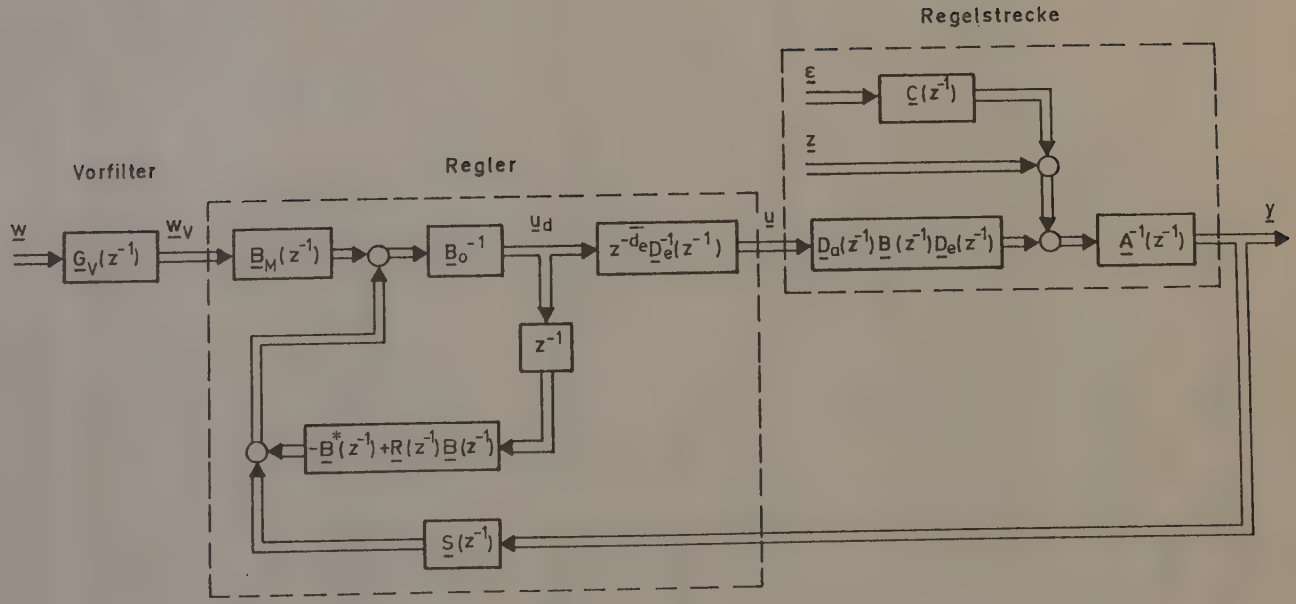



Bild 2.4. Blockschaltbild des Grundregelkreises

back" Struktur, die für lineare Mehrgrößensysteme in vieler Hinsicht untersucht worden ist (Wolovich (1974), Ackermann (1983)).

Im Gegensatz zu der Vorgehensweise, bei der man den Regler direkt bestimmt, wird bei der hier beschriebenen Vorgehensweise das Parallelmodell vorgegeben und daraus der Regler entwickelt. Es ist aber durchaus möglich, alle für die Struktur in Bild 2.4 angegebenen Verfahren anzuwenden, falls die Anforderungen, die sonst direkt an den Regler gestellt werden, für das Parallelmodell umformuliert werden. Die Verwendung des Parallelmodells bringt eventuell bei der Berechnung des Reglers Vorteile, die im wesentlichen nur in der Auswertung der Polynomgleichungen Gl.(2.55) besteht.

Bei bekannter Regelstrecke braucht das Parallelmodell natürlich nicht realisiert zu werden. Anders verhält es sich jedoch bei dem später dargestellten adaptiven Regler für unbekannte Regelstrecken, bei dem die Größe $\underline{y}_M(z)$ explizit als Referenzgröße benötigt wird.

An dieser Stelle soll kurz auf das Anfangswertproblem eingegangen werden. Aus der Kompensationsbedingung Gl.(2.46) folgt für das Zeitverhalten des Fehlervektors

$$\underline{e}(k) = \underline{0} \quad \text{für alle} \quad k \geq 0 \quad \text{und} \quad \underline{\varepsilon}(k) \equiv \underline{0} \; ; \quad \underline{z}(k) \equiv \underline{0} \; ,$$

falls alle Anfangswerte gleich Null sind. Sind jedoch der Anfangszustand der Regelstrecke und der Anfangszustand des Parallelmodells verschieden, so ist auch der Anfangswert des Fehlervektors ungleich Null. Für nicht verschwindende Anfangswerte konvergiert der Fehlervektor dann exponentiell gegen Null. Dies läßt sich leicht aus Gl.(2.46) ableiten. Mit der Darstellung

$$A_{Mi}(z^{-1}) = 1 + \sum_{l=1}^{n(A_{Mi})} a_{Mil}\, z^{-l}$$

$$= \prod_{l=1}^{n(A_{Mi})} (1-\lambda_{Mil}\, z^{-1}); \quad i = 1, \ldots, q \qquad (2.62)$$

ergeben sich für den störungsfreien Fall aus Gl.(2.46) nach Anwendung der inversen $\mathcal{Z}$-Transformation die linearen, zeitinvarianten, autonomen Differenzengleichungen

$$e_i(k) + \sum_{l=1}^{n(A_{Mi})} a_{Mil}\, e_i(k-l) = 0 \text{ für alle } k > 0;\ i = 1, \ldots, q \tag{2.63}$$

mit den Anfangswerten $\{e_i(0), e_i(-1), \ldots, e_i(-n(A_{Mi})+1)\}$. Gl. (2.63) führt mit Gl.(2.62) auf die Lösung

$$e_i(k) = \sum_{l=1}^{n(A_{Mi})} \gamma_{il}\, \lambda_{Mil}^{k} \text{ für alle } k > 0;\ i = 1, \ldots, q\,, \tag{2.64}$$

wobei die Koeffizienten $\gamma_{il}$ Funktionen der Anfangswerte der Signale $e_i$ sind, d. h.

$$\gamma_{il} = f_{il}\,[e_i(0), e_i(-1), \ldots, e_i(-n(A_{Mi})+1)];\ i = 1, \ldots, q$$

$$\text{und } l = 1, \ldots, n(A_{Mi}).$$

Aus Gl.(2.64) ergibt sich, daß

$$|e_i(k)| \leq \left| \sum_{l=0}^{n(A_{Mi})} \gamma_{il} \right| |\lambda_{Mi}|_{max}^{k};\ i = 1, \ldots, q \tag{2.65}$$

ist, wobei $|\lambda_{Mi}|_{max}$ die (in der z-Ebene) betragsmäßig größte Wurzel des Polynoms $A_{Mi}(z^{-1})$ ist, d. h.

$$|\lambda_{Mi}|_{max} = \max_{1 \leq l \leq n(A_{Mi})} \{|\lambda_{Mil}|\};\ i = 1, \ldots, q\,.$$

Da aufgrund der Stabilität des Parallelmodells

$$|\lambda_{Mi}|_{max} < 1\ ;\quad i = 1, \ldots, q \tag{2.66}$$

ist, folgt aus Gl.(2.65) die exponentielle Konvergenz des Fehlervektors bei nicht verschwindenden Anfangswerten. Die Konvergenzrate ist dabei abhängig von der Wahl des Parallelmodells.

## 2.3. Diskussion des Stör- und Führungsverhaltens

### 2.3.1. Führungsverhalten

Das Führungsverhalten des in Abschnitt 2.2 entwickelten Reglers erhält man aus der Gleichung für das dynamische Verhalten des Fehlervektors $\underline{e}(z)$, Gl.(2.60), indem die Störterme $\underline{\varepsilon}(z)$ und $\underline{z}(z)$ identisch Null gesetzt werden. Dann ist $\underline{e}(z) \equiv \underline{0}$ und es ergibt sich entsprechend Gl.(2.37) und Gl.(2.39)

$$\underline{y}(z) = \underline{y}_M(z) = \underline{A}_M^{-1}(z^{-1}) z^{-\bar{d}_e} \underline{D}_a(z^{-1}) \underline{B}_M(z^{-1}) \underline{G}_V(z^{-1}) \underline{w}(z) \quad . \tag{2.67}$$

Damit ist das Führungsverhalten durch die Übertragungsmatrix

$$\underline{G}_W(z^{-1}) = \underline{A}_M^{-1}(z^{-1}) z^{-\bar{d}_e} \underline{D}_a(z^{-1}) \underline{B}_M(z^{-1}) \underline{G}_V(z^{-1}) \tag{2.68}$$

festgelegt.

### 2.3.2. Störverhalten

Zur Analyse des Störverhaltens werden die Sollwerte $\underline{w}(z)$ zu Null gesetzt. Dann ist auch der Ausgangsvektor $\underline{y}_M(z)$ des Parallelmodells gleich Null und es ergibt sich aus Gl.(2.60)

$$\underline{y}(z) = \underline{A}_M^{-1}(z^{-1}) (\underline{I} - \underline{R}(z^{-1}) z^{-1}) (\underline{C}(z^{-1}) \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z)) \quad . \tag{2.69}$$

Das Störverhalten kann somit durch die Wahl der "Nenner"-Matrix $\underline{A}_M(z^{-1})$ des Parallelmodells entscheidend beeinflußt werden. Wählt man darüber hinaus die Grade der Polynome $R_i(z^{-1})$ - das sind die Elemente der Matrix $\underline{R}(z^{-1})$ - höher als die nach Gl.(2.56a) minimal möglichen Grade, d. h. $n_{R_i} > 0$, so gewinnt man zusätzliche Freiheitsgrade für den Entwurf des Reglers hinzu, mit denen man ebenfalls auf das Störverhalten des Regelkreises einwirken kann. Eine Graderhöhung eines Polynoms $R_i(z^{-1})$ ist nach Gl.(2.56b) für den praktisch wichtigen Fall, in dem $n(A_{Mi}) \leq n(A_i)$ für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$ gewählt wird, mit einer Graderhöhung des entsprechenden Polynoms $S_i(z^{-1})$ verbunden. Da diese Polynome direkt im Regler realisiert werden (vgl. Bild 2.4), bedeutet dies letztendlich eine Ordnungserhöhung des Reglers und damit eine Aufwandserhöhung für die Regelung.

Wie aufgrund der Struktur in Bild 2.4 zu erwarten ist, ist das Störverhalten vollkommen unabhängig von dem Vorfilter $\underline{G}_V(z^{-1})$ und der "Zähler"-Matrix $\underline{B}_M(z^{-1})$ des Parallelmodells. Bei dem Entwurf geht man daher zweckmäßigerweise so vor, daß durch die Wahl der Matrix $\underline{A}_M(z^{-1})$ und der zusätzlichen Freiheitsgrade bezüglich der Matrix $\underline{R}(z^{-1})$ ein gewünschtes Störverhalten eingestellt wird. Durch die Wahl des Vorfilters und der Matrix $\underline{B}_M(z^{-1})$ kann dann noch entsprechend Gl.(2.68) ein beliebiges Führungsverhalten, das allerdings aus Kausalitätsgründen die Schrittverzögerungen $z^{-\bar{d}_e}\,\underline{D}_a(z^{-1})$ enthalten muß, realisiert werden.

Im folgenden soll das Verhalten für deterministische und stochastische Störungen getrennt behandelt werden.

2.3.2.1. Deterministische Störungen

Entsprechend Gl.(2.69) ist die Störübertragungsmatrix $\underline{G}_Z(z^{-1})$ für deterministische Störungen durch die Gleichung

$$\underline{G}_Z(z^{-1}) = \underline{A}_M^{-1}(z^{-1})\,(\underline{I} - \underline{R}(z^{-1})\,z^{-1}) \tag{2.70}$$

gegeben. Der Regler soll so entworfen werden, daß deterministische Störungen, die die Annahme nach Gl.(2.25) erfüllen, ausgeregelt werden, d. h.

$$\lim_{k\to\infty} \underline{y}(k) = \lim_{z\to 1} [(1 - z^{-1})\,\underline{y}(z)] = \underline{0} \quad . \tag{2.71}$$

Gl.(2.71), die den Grenzwertsatz der $\mathcal{Z}$-Transformation (Ackermann, 1982) beinhaltet, gilt nur, falls beide Grenzwerte existieren, d. h. falls $\underline{y}(k)$ beschränkt bleibt. Dies ist bei dem hier beschriebenen Entwurfskonzept aber immer der Fall, wie noch in Abschnitt 2.4 erläutert wird. Entsprechend Gl.(2.69) gilt für rein deterministische Störungen

$$\underline{y}(z) = \underline{A}_M^{-1}(z^{-1})\,(\underline{I} - \underline{R}(z^{-1})\,z^{-1})\,\underline{z}(z) \quad . \tag{2.72}$$

Damit folgt aus Gl.(2.71) die Bedingung

$$\lim_{z\to 1} [(1 - z^{-1})\underline{A}_M^{-1}(z^{-1})\underline{Q}(z^{-1})\underline{z}(z)] \stackrel{!}{=} \underline{0} \tag{2.73}$$

mit

$$\underline{Q}(z^{-1}) = \underline{I} - \underline{R}(z^{-1})z^{-1}$$

$$= \text{diag}\{Q_i(z^{-1}\} = \text{diag}\{1 - R_i(z^{-1})z^{-1}\};\ i = 1,\ldots,q \quad . \tag{2.74}$$

Da $\underline{R}(z^{-1})$ Diagonalform hat, ist auch $\underline{Q}(z^{-1})$ eine Diagonalmatrix. Aus Gl.(2.25) ergibt sich, daß die $\mathcal{Z}$-Transformierte jeder Störung $z_i(k)$ der Bedingung

$$\lim_{z\to 1} (1 - z^{-1})^{n_{zi}+1} z_i(z) = z_i^* < \infty; \quad i = 1,\ldots,q \tag{2.75}$$

genügt. Da die Matrix von $\underline{A}_M(1)$ aufgrund der asymptotischen Stabilität des Parallelmodells nichtsingulär ist (vgl. Gl. (2.38b)), ist Gl.(2.73) somit dann erfüllt, wenn die Polynome $Q_i(z^{-1})$ (i = 1,...,q) eine $(n_{zi}+1)$-fache Wurzel bei z = 1 besitzen, d. h. wenn sie sich in die Faktoren

$$Q_i(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^{n_{zi}+1} Q_i'(z^{-1});\ i = 1,\ldots,q \tag{2.76}$$

zerlegen lassen.

Die Polynome $R_i(z^{-1})$ müssen nach wie vor die Polynomgleichung Gl.(2.55) und zusätzlich entsprechend den Gleichungen (2.74) und (2.76) die Beziehung

$$1 - R_i(z^{-1})z^{-1} = (1 - z^{-1})^{n_{zi}+1} Q_i'(z^{-1});\ i = 1,\ldots,q \tag{2.77}$$

erfüllen. Aus Gl.(2.77) ist ersichtlich, daß die Absolutkoeffizienten der Polynome $Q_i'(z^{-1})$ gleich Eins sein müssen:

$$Q_i'(z^{-1}) = 1 + \sum_{l=1}^{n(Q_i')} q_{il}' z^{-l}$$

$$= 1 + Q_i'^*(z^{-1})z^{-1};\ i = 1,\ldots,q \quad . \tag{2.78}$$

Definiert man die Polynome

$$P_i(z^{-1}) = \left[(1-z^{-1})^{n_{zi}+1}\, Q_i'(z^{-1}) - 1\right]\cdot z$$

$$= P_{1i}(z^{-1}) + (1-z^{-1})^{n_{zi}+1}\, Q_i'^{*}(z^{-1});\ i = 1,\ldots,q \tag{2.79}$$

mit

$$P_{1i}(z^{-1}) = \left[(1-z^{-1})^{n_{zi}+1} - 1\right] z =$$

$$= \sum_{l=1}^{n_{zi}+1} \binom{n_{zi}+1}{l} (-1)^l\, z^{-(l-1)}\ ;\ i = 1,\ldots,q, \tag{2.80}$$

so ergibt sich aus Gl.(2.77)

$$-R_i(z^{-1}) = P_{1i}(z^{-1}) + (1-z^{-1})^{n_{zi}+1}\, Q_i'^{*}(z^{-1});\ i = 1,\ldots,q\ . \tag{2.81}$$

Damit müssen nach Gl.(2.55) die noch unbestimmten Polynome $Q_i'^{*}(z^{-1})$ zusammen mit den Polynomen $S_i(z^{-1})$ jeweils der diophantischen Gleichung

$$\Delta A_i^{*}(z^{-1}) + P_{1i}(z^{-1})\, A_i(z^{-1}) = z^{-(\bar{d}_e + d_i^a - 1)}\, S_i(z^{-1})$$

$$- Q_i'^{*}(z^{-1})(1-z^{-1})^{n_{zi}+1}\, A_i(z^{-1});\ i = 1,\ldots,q \tag{2.82}$$

genügen. Entsprechend Anhang A1 ist diese Gleichung nur lösbar, falls die Polynome $Q_i'^{*}(z^{-1})$ mindestens mit den Graden $\bar{d}_e + d_i^a - 2$ angesetzt werden.[1] Nach Gl.(2.81) besitzen die Polynome $R_i(z^{-1})$ dann jeweils den Grad

$$n(R_i) = \bar{d}_e + d_i^a + n_{zi} - 1;\ i = 1,\ldots,q\ . \tag{2.83}$$

Vergleicht man Gl.(2.83) mit Gl.(2.56a), so wird deutlich, daß für die Ausregelung von deterministischen Störungen, die Gl. (2.27) erfüllen, gegenüber dem Entwurf mit minimaler Reglerordnung mindestens

$$n_{Ri} = n_{zi} + 1;\quad i = 1,\ldots,q \tag{2.84}$$

---

[1] Für $\bar{d}_e = 0$ und $d_i^a = 1$ kann $Q_i'^{*}(z^{-1}) \equiv 0$ gesetzt werden.

zusätzliche Freiheitsgrade für die Reglerpolynome $R_i(z^{-1})$ und $S_i(z^{-1})$ vorgesehen werden müssen. Diese Freiheitsgrade werden durch Gl.(2.81) so ausgenutzt, daß die Bedingung nach Gl.(2.76) erfüllt wird.

Setzt man Gl.(2.76) direkt in die dem Stellgesetz zugrunde liegende Beziehung Gl.(2.59) ein, so erkennt man, daß die in diesem Abschnitt durchgeführte mathematische Ableitung auf die Einführung eines $(n_{zi}+1)$-fachen Integrators für jede Regelgröße $y_i(z)$ $(i = 1,\ldots,q)$ hinausläuft. Diese "vornehmen" mathematischen Betrachtungen belegen letztendlich nichts anderes als die banale Tatsache, daß für die Ausregelung einer sprungförmigen Störung ein einfacher I-Anteil, einer rampenförmigen Störung ein doppelter I-Anteil usw. im Regler vorzusehen ist. Allerdings liefern sie darüber hinaus noch den Algorithmus, wie diese Integratoren in das in Abschnitt 2.2 entworfene Regelungskonzept eingebaut werden können.

In der Praxis ist es im allgemeinen ausreichend, für alle Störungen $z_i(k)$ $(i = 1,\ldots,q)$ das gleiche stationäre Verhalten anzunehmen, d. h.

$$n_{z1} = n_{z2} = \ldots = n_{zq} = n_z \quad . \tag{2.85}$$

Häufig genügt es sogar, nur sprungförmige Störungen, d. h. $n_z = 0$, zu berücksichtigen. Unter der Annahme nach Gl.(2.85) läßt sich der I-Anteil einfach explizit realisieren. Dies bringt insbesondere für den später zu diskutierenden adaptiven Regler Vorteile.

Hierzu wird die Gleichung der Regelstrecke, Gl.(2.21), auf beiden Seiten mit dem Faktor $(1 - z^{-1})^{n_z+1}$ multipliziert. Auf der linken Seite wird dieser Faktor der Polynommatrix $\underline{A}(z^{-1})$, auf der rechten Seite den Signalen $\underline{u}(z)$, $\underline{\varepsilon}(z)$ und $\underline{z}(z)$ zugeschlagen. Es gilt dann

$$\underline{A}_I(z^{-1})\underline{y}(z) = \underline{D}_a(z^{-1})\underline{B}(z^{-1})\underline{D}_e(z^{-1})\underline{u}_I(z) + \underline{C}(z^{-1})\underline{\varepsilon}_I(z) + \underline{z}_I(z) \tag{2.86}$$

mit

$$\underline{A}_I(z^{-1}) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\,\underline{A}(z^{-1}) = \underline{I} + \mathrm{diag}\{A^*_{Ii}(z^{-1})\}z^{-1};\quad i = 1,\ldots,q \tag{2.87a}$$

$$\underline{u}_I(z) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\,\underline{u}(z) \tag{2.87b}$$

$$\underline{\varepsilon}_I(z) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\,\underline{\varepsilon}(z) \tag{2.87c}$$

$$\underline{z}_I(z) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\,\underline{z}(z)\quad . \tag{2.87d}$$

Unter der Annahme nach Gl.(2.25) und Gl.(2.85) folgt

$$\lim_{k\to\infty} \underline{z}_I(k) = \underline{0} \tag{2.88}$$

für den deterministischen Teil der Störung. $\underline{\varepsilon}_I(z)$ stellt weiterhin einen Vektor mittelwertfreier stochastischer Störsignale dar, die jedoch entsprechend Gl.(2.87c) nicht mehr weiß sind.

Der Entwurf nach Abschnitt 2.2.4 wird jetzt noch einmal wiederholt, indem konsequent in allen Gleichungen $\underline{A}(z^{-1})$, $\underline{u}(z)$, $\underline{\varepsilon}(z)$ und $\underline{z}(z)$ durch die modifizierten Größen $\underline{A}_I(z^{-1})$, $\underline{u}_I(z^{-1})$, $\underline{\varepsilon}_I(z)$ und $\underline{z}_I(z)$ ersetzt werden. Zusätzlich wird entsprechend Gl.(2.43) der Hilfssignalvektor $\underline{u}_d$ formal durch den Vektor

$$z^{-d_e}\,\underline{u}_{dI}(z) = \underline{D}_e(z^{-1})\underline{u}_I(z^{-1})$$

ersetzt. Dann ergibt sich

- nach Gl.(2.61a,b) das Stellgesetz

$$\begin{aligned}\underline{u}_{dI}(z) = \underline{B}_O^{-1}[&\underline{B}_M(z^{-1})\underline{G}_V(z^{-1})\underline{w}(z)\\ &+ (-\underline{B}^*(z^{-1}) + \underline{R}_I(z^{-1})\underline{B}(z^{-1}))z^{-1}\underline{u}_{dI}(z)\\ &+ \underline{S}_I(z^{-1})\underline{y}(z)]\end{aligned} \tag{2.89}$$

$$\underline{u}_I(z) = z^{-\bar{d}_e}\,\underline{D}_e^{-1}(z^{-1})\underline{u}_{dI}(z) \tag{2.90}$$

$$\underline{u}(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^{n_z+1}}\,\underline{u}_I(z)\quad , \tag{2.91}$$

wobei die Polynommatrizen $\underline{R}_I(z^{-1})$ und $\underline{S}_I(z^{-1})$ entsprechend Gln.(2.54a,b) Diagonalmatrizen sind, deren Elemente die Polynomgleichungen

$$\Delta A^*_{Ii}(z^{-1}) = z^{-(\bar{d}_e+d^a_i-1)} S_{Ii}(z^{-1}) + \underline{R}_{Ii}(z^{-1})\underline{A}_{Ii}(z^{-1}); \quad i = 1,\ldots,q \qquad (2.92)$$

mit

$$\Delta A^*_{Ii}(z^{-1}) = A^*_{Ii}(z^{-1}) - A^*_{Mi}(z^{-1}); \; i = 1, \ldots, q \qquad (2.93)$$

erfüllen müssen, und

- nach Gl.(2.60) für das dynamische Verhalten des Fehlervektors

$$\underline{A}_M(z^{-1})\underline{e}(z) = -(\underline{I} - \underline{R}_I(z^{-1})z^{-1})(\underline{C}(z^{-1})\underline{\varepsilon}_I(z) + \underline{z}_I(z)) \; . \qquad (2.94)$$

Gl.(2.91) ist dabei mit Gl.(2.87b) identisch.

Aus Gl.(2.94) erhält man mit Gl.(2.88) bei rein deterministischen Störungen ($\underline{\varepsilon}_I(z) = \underline{0}$)

$$\lim_{k\to\infty} \underline{e}(k) = \underline{0} \quad , \qquad (2.95)$$

d. h. die deterministischen Störungen werden ausgeregelt.

Die Multiplikation der Gleichung der Regelstrecke, Gl.(2.21), mit dem Faktor $(1-z^{-1})^{n_z+1}$, bedeutet, daß man das gewünschte $(n_z+1)$-fache I-Verhalten zunächst zur Regelstrecke schlägt und dann auf die so erweiterte Regelstrecke den Kompensationsregler nach Abschnitt 2.2.4 anwendet. Dies wird auch noch einmal in Bild 2.5 deutlich, das das Blockschaltbild der hier diskutierten erweiterten Regelung zeigt.

### 2.3.2.2. Stochastische Störungen - Der Minimum-Varianz-Regler

Nach Gl.(2.60) erhält man für das dynamische Verhalten der Regelgrößen bei rein stochastischen Störungen

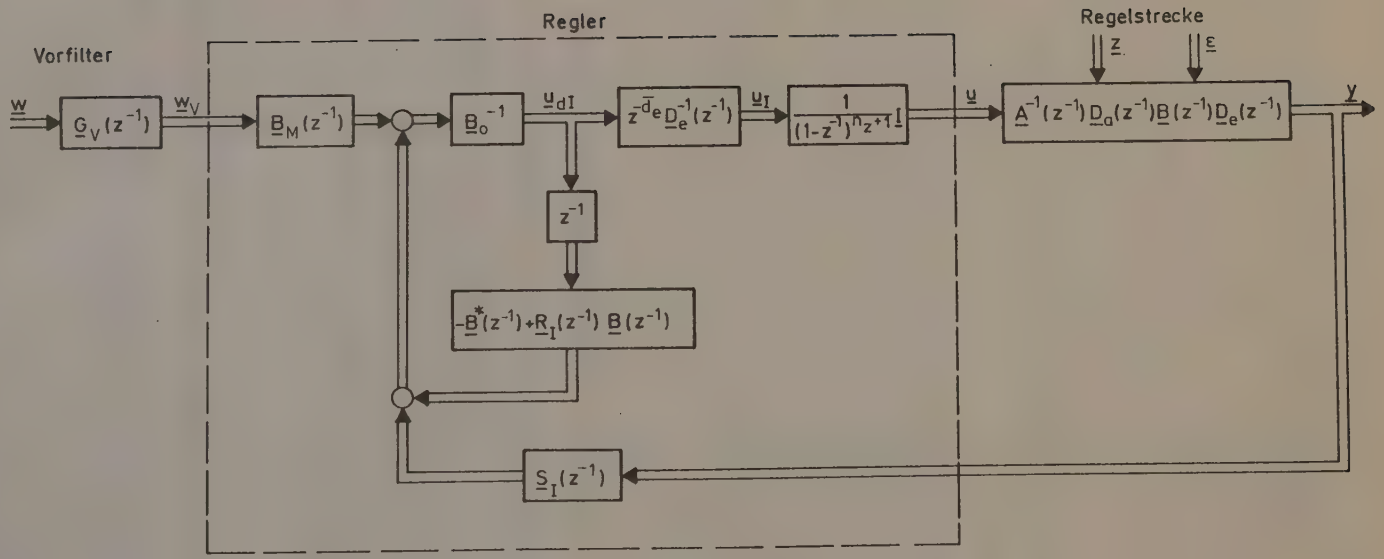



Bild 2.5. Blockschaltbild des Grundregelkreises bei Verwendung eines Reglers mit explizitem $(n_z+1)$-fachen I-Verhalten

$$\underline{A}_M(z^{-1})\underline{y}(z) = (\underline{I} - \underline{R}(z^{-1})z^{-1})\underline{C}(z^{-1})\underline{\varepsilon}(z) \quad . \tag{2.96}$$

Die Störübertragungsmatrix ist also in diesem Fall durch

$$\underline{G}_\varepsilon(z^{-1}) = \underline{A}_M^{-1}(z^{-1})(\underline{I} - \underline{R}(z^{-1})z^{-1})\underline{C}(z^{-1}) \tag{2.97}$$

gegeben.

Zunächst wird davon ausgegangen, daß die an den Ausgängen $y_i(k)$ $(i = 1,\ldots,q)$ der ungeregelten Regelstrecke meßbaren stochastischen Störungen $r_{\varepsilon i}(k)$, das sind die Komponenten des Störvektors $\underline{r}_\varepsilon(k)$ nach Gl.(2.27), voneinander statistisch unabhängig sind. Dann werden diese Signale auf verschiedene weiße Rauschsignale

$$\varepsilon_i(k) \neq \varepsilon_j(k) \quad \text{für} \quad i \neq j \tag{2.98a}$$

zurückgeführt, und es gilt

$$E\{\varepsilon_i(k)\varepsilon_j(k)\} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \quad . \tag{2.98b}$$

Dementsprechend hat die Kovarianzmatrix $\underline{\Sigma}_\varepsilon$ nach Gl.(2.24) die Diagonalform

$$\underline{\Sigma}_\varepsilon = \text{diag}\,\{E\{\varepsilon_i^2(k)\}\} \; ; \quad i = 1,\ldots,q \tag{2.98c}$$

Ziel soll es sein, die Regelung so zu entwerfen, daß die Varianzen der Regelgrößen minimiert werden, d. h.

$$E\{y_i^2(k)\} \stackrel{!}{=} \min \; ; \quad i = 1,\ldots,q \quad . \tag{2.99}$$

Aufgrund der Diagonalform der Matrizen $\underline{A}(z^{-1})$, $\underline{A}_M(z^{-1})$, der daraus sich ergebenden Diagonalität von $\underline{R}(z^{-1})$, sowie der Diagonalform von $\underline{C}(z^{-1})$ und der vorausgesetzten statistischen Unabhängigkeit der Störsignale nach Gl.(2.98a bis c) sind die Kovarianzen

$$E\{y_i(k)\cdot y_j(k)\} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \quad . \tag{2.100a}$$

Somit ist auch die Kovarianzenmatrix

$$E\{\underline{y}(k)\underline{y}^T(k)\} = \text{diag}\,\{E\{y_i^2(k)\}\} \tag{2.100b}$$

eine Diagonalmatrix.

Zuerst wird der vereinfachte Fall für nichtsprungfähige Regelstrecken ohne Totzeit mit

$$\underline{D}_a(z^{-1}) = z^{-1}\,\underline{I} \tag{2.101a}$$

$$\overline{d}_e = 0 \tag{2.101b}$$

betrachtet. Dann kann die Polynommatrix $\underline{R}(z^{-1})$ als Nullmatrix angesetzt werden, und aus Gl.(2.96) ergibt sich

$$\underline{A}_M(z^{-1})\underline{y}(z) = \underline{C}(z^{-1})\underline{\varepsilon}(z) \quad . \tag{2.102}$$

Durch die Wahl

$$\underline{A}_M(z^{-1}) = \underline{C}(z^{-1}) \tag{2.103}$$

erhält man aus Gl.(2.102)

$$\underline{y}(z) = \underline{\varepsilon}(z) \quad ,$$

d. h. die Regelgrößen sind mit den weißen Rauschsignalen identisch. Ihre Varianz kann somit nicht weiter verkleinert werden. Die Wahl des Parallelmodells nach Gl.(2.103) führt demnach zumindest unter der Annahme nach Gl.(2.101a,b), d. h. für Regelstrecken ohne Totzeit, direkt auf den Minimum-Varianz-Regler.

Da das Parallelmodell asymptotisch stabil sein muß, ist seine Wahl nach Gl.(2.103) nur für solche Störungen möglich, deren statistische Eigenschaften durch eine Störpolynommatrix beschrieben werden können, die ausschließlich Hurwitzpolynome enthält. Es ist wohl bekannt, daß der Minimum-Varianz-Regler ein instabiles Verhalten des geschlossenen Regelkreises ergibt, falls eine Wurzel des Störpolynoms (bzw. der Störpolynome) außerhalb des Einheitskreises der z-Ebene liegt (Åström (1970)).

Es soll nun gezeigt werden, daß auch für Regelstrecken mit Totzeit die Wahl des Parallelmodells nach Gl.(2.103) auf den Minimum-Varianz-Regler führt. Hierzu ist es methodisch günstiger, den Minimum-Varianz-Regler unabhängig von dem im Abschnitt 2.2.4 entworfenen Regler herzuleiten und dann zu zeigen, daß der Minimum-

Varianz-Regler ein Spezialfall der in Bild 2.4 angegebenen Struktur darstellt. Hierzu wird von der Gleichung der Regelstrecke, Gl.(2.21), ausgegangen, die unter Berücksichtigung von Gl.(2.43) zu der Form

$$\underline{A}(z^{-1})\underline{y}(z) = \underline{D}_a(z^{-1})\underline{B}(z^{-1})z^{-\bar{d}_e}\,\underline{u}_d(z) + \underline{C}(z^{-1})\underline{\varepsilon}(z) \qquad (2.104)$$

modifiziert wird (Da in diesem Abschnitt keine deterministischen Störungen betrachtet werden, ist $\underline{z}(z) = \underline{O}$ gesetzt).

Es lassen sich nun immer diagonale Polynommatrizen

$$\underline{S}_C(z^{-1}) = \text{diag}\,\{S_{Ci}(z^{-1})\}\ ; \quad i = 1,\ldots,q \qquad (2.105a)$$

und

$$\underline{R}_C(z^{-1}) = \text{diag}\,\{R_{Ci}(z^{-1})\}\ ; \quad i = 1,\ldots,q \qquad (2.105b)$$

finden, die die Polynommatrizengleichung

$$\underline{A}(z^{-1}) - \underline{C}(z^{-1}) = z^{-\bar{d}_e}\,\underline{D}_a(z^{-1})\underline{S}_C(z^{-1}) + \underline{R}_C(z^{-1})\underline{A}(z^{-1})z^{-1} \qquad (2.106)$$

erfüllen. Gl.(2.106) ist formal eine Gleichung gleichen Typs wie Gl.(2.52), die der Prädiktion zugrunde liegt (Aufgrund der Normierung der Matrizen $\underline{A}(z^{-1})$ und $\underline{C}(z^{-1})$ besitzt die linke Seite von Gl.(2.106) keine Absolutmatrix). Entsprechend Gl.(2.106) müssen die Polynome $S_{Ci}(z^{-1})$ und $R_{Ci}(z^{-1})$ der diophantischen Gleichung

$$A_i^*(z^{-1}) - C_i^*(z^{-1}) = z^{-(\bar{d}_e + d_i^a - 1)}\,S_{Ci}(z^{-1}) + A_i(z^{-1})R_{Ci}(z^{-1})\ ; \quad i = 1,\ldots,q \qquad (2.107)$$

genügen, wobei die Polynome $A_i^*(z^{-1})$ und $C_i^*(z^{-1})$ die Elemente der Matrizen $\underline{A}^*(z^{-1})$ und $\underline{C}^*(z^{-1})$ nach Gln.(2.22a und e) darstellen, für die gilt

$$A_i(z^{-1}) = 1 + A_i^*(z^{-1})z^{-1}\ ; \quad i = 1,\ldots,q \qquad (2.108a)$$

$$C_i(z^{-1}) = 1 + C_i^*(z^{-1})z^{-1}\ ; \quad i = 1,\ldots,q\ . \qquad (2.108b)$$

Die Lösung von Gl.(2.107) ergibt sich aus Anhang A1.

Mit Gl.(2.106) erhält man aus Gl.(2.104)

$$\begin{aligned}\underline{C}(z^{-1})\underline{y}(z) = {} & \underline{D}_a(z^{-1})z^{-\overline{d}_e} \\ & \cdot\left[\underline{B}(z^{-1})\underline{u}_d(z) - \underline{S}_C(z^{-1})\underline{y}(z)\right] \\ & - \underline{R}_C(z^{-1})\underline{A}(z^{-1})z^{-1}\ \underline{y}(z) \\ & + \underline{C}(z^{-1})\underline{\varepsilon}(z) \quad . \end{aligned} \tag{2.109}$$

Setzt man für den Term $\underline{A}(z^{-1})\underline{y}(z)$ noch einmal Gl.(2.104) ein, so geht Gl.(2.109) in die Beziehung

$$\begin{aligned}\underline{y}(z) = {} & \underline{C}^{-1}(z^{-1})z^{-\overline{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1}) \cdot \\ & \left[(\underline{I} - \underline{R}_C(z^{-1})z^{-1})\underline{B}(z^{-1})\underline{u}_d(z) - \underline{S}_C(z^{-1})\underline{y}(z)\right] \\ & + \left[\underline{I} - \underline{R}_C(z^{-1})z^{-1}\right]\ \underline{\varepsilon}(z) \end{aligned} \tag{2.110}$$

über. Mit den Definitionen

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}(k) = {} & \mathcal{Z}^{-1}\{\underline{C}^{-1}(z^{-1})z^{-\overline{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1}) \\ & [(\underline{I} - \underline{R}_C(z^{-1})z^{-1})\underline{B}(z^{-1})\underline{u}_d(z) - \underline{S}_C(z^{-1})\ \underline{y}(z)]\} \end{aligned} \tag{2.111}$$

und

$$\underline{\varepsilon}_R(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{(\underline{I} - \underline{R}_C(z^{-1})z^{-1})\underline{\varepsilon}(z)\} \tag{2.112}$$

ergibt sich damit im Zeitbereich

$$\underline{y}(k) = \underline{\varphi}(k) + \underline{\varepsilon}_R(k) \quad . \tag{2.113}$$

Für die Varianzen der Regelgrößen folgt

$$\begin{aligned} E\{\underline{y}(k)\underline{y}^T(k)\} = {} & E\{\underline{\varphi}(k)\underline{\varphi}^T(k)\} \\ & + E\{\underline{\varphi}(k)\underline{\varepsilon}_R^T(k)\} \\ & + E\{\underline{\varepsilon}_R(k)\underline{\varphi}^T(k)\} \\ & + E\{\underline{\varepsilon}_R(k)\underline{\varepsilon}_R^T(k)\} \quad . \end{aligned} \tag{2.114}$$

Nach Gl.(2.107) und Gl.(A1.7) sind die minimalen Grade der Polynome $R_{Ci}(z^{-1})$ durch

$$n_{min}(R_{Ci}) = \bar{d}_{\underline{e}} + d_i^a - 2 \; ; \quad i = 1,\ldots,q \tag{2.115}$$

gegeben. Setzt man diese Polynome mit ihrem minimalen Grad an, so ist jede Komponente $\varepsilon_{Ri}(k)$ des Vektors $\underline{\varepsilon}_R(k)$ nach Gl.(2.112) aufgrund der Diagonalform von $\underline{R}_C(z^{-1})$ eine Funktion von $\varepsilon_i(k)$, $\varepsilon_i(k-1),\ldots,$ $\varepsilon_i(k-(\bar{d}_e+d_i^a-1))$, d. h.

$$\varepsilon_{Ri}(k) = f(\varepsilon_i(k-l) \; ; \; l \leq \bar{d}_e + d_i^a - 1) \; ; \quad i = 1,\ldots,q \; . \tag{2.116}$$

Die Signale $\varphi_i(k)$, also die Elemente des Signalvektors $\underline{\varphi}(k)$ nach Gl.(2.111), hängen von den (vergangenen) Signalen

$$\underline{u}_d(k - (\bar{d}_e + d_i^a) - l)$$

und

$$y_i(k - (\bar{d}_e + d_i^a) - l) \quad \text{für } l \geq 0$$

ab.

Nun ist für kausale Stellgesetze $\underline{u}_d(k)$ wiederum eine Funktion der aktuellen und vergangenen Regelgrößen $\underline{y}(k)$, $\underline{y}(k-1),\ldots$ Aus diesen Überlegungen folgt

$$\varphi_i(k) = f\{\underline{y}(k - (\bar{d}_e + d_i^a) - l); \; l \geq 0\}; \quad i = 1,\ldots,q \; . \tag{2.117}$$

Damit erhält man letztendlich unter Berücksichtigung von Gl. (2.104)

$$\varphi_i(k) = f\{\underline{\varepsilon}(k - (\bar{d}_e + d_i^a) - l \; , \; \underline{u}_d(k - 2(\bar{d}_e + d_i^a) - l \; ; \; l \geq 0\} \; . \tag{2.118}$$

Da weißes Rauschen die Eigenschaft

$$E\{\underline{\varepsilon}(k)\underline{\varepsilon}(k-l)\} = \underline{0} \quad \text{für} \quad l \neq 0$$

aufweist, folgt aus Gl.(2.116) und Gl.(2.118)

$$E\{\underline{\varphi}(k)\underline{\varepsilon}_R^T(k)\} = E\{\underline{\varepsilon}_R(k)\underline{\varphi}^T(k)\} = \underline{0} \tag{2.119}$$

für alle kausalen Stellgesetze. Der Signalvektor $\underline{\varphi}(k)$ und der Störvektor $\underline{\varepsilon}_R(k)$ sind also stets unkorreliert, falls die Polynome

$R_{Ci}(z^{-1})$ mit minimalem Grad angesetzt werden. Sind die am Ausgang der ungeregelten Regelstrecke meßbaren stochastischen Störungen statistisch unabhängig, d. h. gilt Gl.(2.98a bis c), so ergibt sich aus Gl.(2.116)

$$E\{\underline{\varepsilon}(k)\underline{\varepsilon}_R^T(k)\} = \text{diag}\{E\{\varepsilon_{Ri}^2(k)\}\} \; ; \quad i = 1,\ldots,q \; . \tag{2.120}$$

Damit erhält man aus Gl.(2.114)

$$E\{\underline{y}(k)\underline{y}^T(k)\} = E\{\underline{\varphi}(k)\underline{\varphi}^T(k)\} + \text{diag}\{E\{\varepsilon_{Ri}^2(k)\}\}; \; i = 1,\ldots,q \; . \tag{2.121}$$

Da die Signale $\varepsilon_{Ri}$ nur von den Störsignalen $\varepsilon_i$ und nicht von dem Hilfssignalvektor $\underline{u}_d$, d. h. den Stellgrößen, abhängen, sind die Varianzen $E\{\varepsilon_{Ri}^2(k)\}$ $(i = 1,\ldots,q)$ invariant gegenüber allen Stellgesetzen. Diese Varianzen können also nicht beeinflußt werden. Aber der Signalvektor $\underline{\varphi}$ nach Gl.(2.111) ist eine Funktion von $\underline{u}_d$. Nach Gl.(2.121) erhält man die minimale Varianz der Regelgrößen für

$$\underline{\varphi}(k) \equiv \underline{0} \; , \tag{2.122}$$

es gilt dann

$$E\{\underline{y}(k)\underline{y}^T(k)\} = \text{diag}\{E\{\varepsilon_{Ri}^2(k)\}$$

bzw.

$$E\{y_i^2(k)\} = E\{\varepsilon_{Ri}^2(k)\} \; ; \quad i = 1,\ldots,q \tag{2.123a}$$

$$E\{y_i(k) \cdot y_j(k)\} = 0 \quad \text{für} \quad j \neq i \; . \tag{2.123b}$$

Das Stellgesetz des Minimum-Varianz-Reglers muß also Gl.(2.122) erfüllen. Für Störpolynommatrizen, die nur Hurwitzpolynome enthalten, erhält man damit aus Gl.(2.111) das implizite Stellgesetz

$$[\underline{I} - \underline{R}_C(z^{-1})z^{-1}]\,\underline{B}(z^{-1})\underline{u}_d(z) = \underline{S}_C(z^{-1}\underline{y}(z). \tag{2.124}$$

Diese Gleichung ist für

$$\underline{R}(z^{-1}) = \underline{R}_C(z^{-1}) \tag{2.125a}$$

$$\underline{S}(z^{-1}) = \underline{S}_C(z^{-1}) \tag{2.125b}$$

und $\underline{w}_V(z^{-1}) = \underline{0}$ (hier wird ja nur das Störverhalten betrachtet)

identisch mit Gl.(2.59). Dies bedeutet, der Minimum-Varianz-Regler ist ein Sonderfall des in Abschnitt 2.2.3 entworfenen und in Bild 2.4 dargestellten Reglers. Der Sonderfall ist dabei durch die Parameter nach Gl.(2.125a,b) definiert. Durch die Wahl

$$\underline{A}_M(z^{-1}) = \underline{C}(z^{-1}) \tag{2.103}$$

ergeben sich aus der allgemeinen Gl.(2.55) genau die Polynome $S_{Ci}(z^{-1})$ und $R_{Ci}(z^{-1})$ als Lösung, da in diesem Fall Gl.(2.55) und Gl.(2.107) identisch sind. Somit führt also die Wahl des Parallelmodells nach Gl.(2.103) direkt auf den Minimum-Varianz-Regler. Für die minimalen Varianzen der Regelgrößen ergibt sich mit Gl.(2.123a), Gl.(2.112) und den Polynomen

$$R_{Ci}(z^{-1}) = 1 + \sum_{l=0}^{\overline{d}_e+d_i^a-2} r_{Cil}\, z^{-l} \;;\quad i = 1,\ldots,q \tag{2.126}$$

die Beziehung

$$E_{min}\{y_i^2(k)\} = (1 + \sum_{l=0}^{\overline{d}_e+d_i^a-2} r_{Cil}^2)\, E\{\varepsilon_i^2(k)\};\; i = 1,\ldots,q \;. \tag{2.127}$$

Eine wichtige Bedingung für den Minimum-Varianz-Regler, die bisher eher beiläufig behandelt wurde, besteht darin, daß die Polynome $R_{Ci}(z^{-1})$ entsprechend Gl.(2.115) mit ihrem minimal möglichen Grad angesetzt werden. Andernfalls erhöht sich die Varianz der Regelgrößen. Dies ist leicht zu zeigen. Angenommen die Polynome $R_{Ci}(z^{-1})$ werden mit den erhöhten Graden

$$n(R_{Ci}) = \overline{d}_e + d_i^a - 2 + n_{Ri} \;;\quad n_{Ri} > 0 \;;\quad i = 1,\ldots,q \tag{2.128}$$

angesetzt. Dann folgt entsprechend Gl.(2.124) und Gl.(2.123a)

$$E\{y_i^2(k)\} = (1 + \sum_{l=0}^{n(R_{Ci})} r_{Cil}^2) E\{\varepsilon_i^2(k)\};\quad i = 1,\ldots,q \;, \tag{2.129}$$

wobei mit $r_{Cil}$ wieder die Koeffizienten der Polynome $R_{Ci}(z^{-1})$ bezeichnet werden. Entsprechend Anhang A1 liegen die Koeffizienten $r_{Ci0},\ldots, r_{Ci,\overline{d}_e+d_i^a-2}$ für $i = 1,\ldots,q$ unabhängig von $n_{Ri}$ eindeutig fest, so daß sich aus Gl.(2.129)

$$E\{y_i^2(k)\} = E_{min}\{y_i^2(k)\} + \sum_{l=\bar{d}_e+d_i^a-1}^{\bar{d}_e+d_i^a+n_{Ri}-2} r_{Cil}^2 \, E\{\varepsilon_i^2(k)\} \; ;$$

$$i = 1,\ldots,q \qquad (2.130)$$

ergibt. Für $n_{Ri} > 0$ gilt also

$$E\{y_i^2(k)\} > E_{min}\{y_i^2(k)\} \; .$$

Da - wie aus Abschnitt 2.3.2 hervorgeht - für die Ausregelung von deterministischen Störungen stets eine Graderhöhung der Polynome $R_i(z^{-1})$ erforderlich ist, ist es leider nicht möglich, einen Regler zu entwerfen, der deterministische Störungen ausregelt und gleichzeitig für stochastische Störungen eine Minimum-Varianz-Strategie erlaubt.

Es soll nun noch der Fall betrachtet werden, in dem nicht alle an den Ausgängen der Regelstrecke meßbaren Störungen $r_{\varepsilon i}$ ($i \in \{1, \ldots, q\}$) unkorreliert sind. Angenommen $r_{\varepsilon\mu}$ und $r_{\varepsilon\nu}$ ($\mu \neq \nu$) seien statisch abhängig. Dann lassen sie sich auf dasselbe weiße Rauschsignal

$$\varepsilon_\mu(k) = \varepsilon_\nu(k) \qquad (2.131)$$

zurückführen. Der Vektor $\underline{\varepsilon}$ besteht jetzt also teilweise aus identischen Elementen. Demnach ist die Kovarianzmatrix $\underline{\Sigma}_\varepsilon = E\{\underline{\varepsilon}(k)\underline{\varepsilon}^T(k)\}$ keine Diagonalmatrix mehr. Denn außer den Hauptdiagonalelementen sind entsprechend Gl.(2.131) auch die Elemente $(\mu,\nu)$ und $(\nu,\mu)$ dieser Matrix ungleich Null und haben den Wert $E\{\varepsilon_\mu^2(k)\}$. Dasselbe gilt dann auch für die Kovarianzmatrix $E\{\underline{\varepsilon}_R(k)\underline{\varepsilon}_R^T(k)\}$. Mit Gl.(2.112) folgt allgemein

$$E\{\varepsilon_{Ri}^2(k)\} = 1 + \sum_{l=0}^{n(R_{Ci})} r_{Cil}^2 \, E\{\varepsilon_i^2(k)\} \; ; \; i = 1,\ldots,q \qquad (2.132a)$$

$$E\{\varepsilon_{Ri}(k)\varepsilon_{Rj}(k)\} = 1 + \sum_{l=0}^{\kappa_{ij}} r_{Cil} \cdot r_{Cjl} \cdot E\{\varepsilon_i(k)\varepsilon_j(k)\} \; ;$$

$$i,j = 1,\ldots,q \qquad (2.132b)$$

mit

$$\kappa_{ij} = \min\{n(R_{Ci}), \, n(R_{Cj})\} \; . \qquad (2.132c)$$

Gl.(2.132a) ist dabei in Gl.(2.132b) als Spezialfall für $i = j$ enthalten. Gl.(2.132b) gilt ganz allgemein. Für $\varepsilon_i(k) \neq \varepsilon_j(k)$

folgt wieder $E\{\varepsilon_{Ri}(k)\varepsilon_{Rj}(k)\} = 0$. Wählt man nun das Parallelmodell nach Gl.(2.103) und setzt die Polynome $R_{Ci}(z^{-1})$ mit ihren minimal möglichen Graden nach Gl.(2.115) an, so ergeben sich für die Regelgrößen die minimalen Varianzen

$$E_{min}\{y_i(k)y_j(k)\} = (1 + \sum_{l=0}^{\kappa_{ij}} r_{Cil}r_{Cjl})\, E\{\varepsilon_i(k)\varepsilon_j(k)\} \; ; \qquad i,j = 1,\ldots,q \quad (2.133a)$$

mit

$$\kappa_{ij} = \bar{a}_e - 2 + \min\{d_i^a,\, d_j^a\} \quad . \qquad (2.133b)$$

Dies bedeutet, daß eine Korrellation verschiedener Ausgangsstörungen der ungeregelten Regelstrecke auch mit dem Minimum-Varianz-Regler nicht aufgehoben, sondern nur entsprechend Gl.(2.133a) minimiert werden kann.

Gl.(2.133a,b) läßt sich direkt auf den Fall gemischten Stör- und Führungsverhaltens übertragen, wenn die Regelgrößen $y_i$ durch die Fehlersignale $e_i$ ersetzt werden. Entsprechend Gl.(2.60) gilt bei der Wahl des Parallelmodells nach Gl.(2.103) und dem minimalen Grad der Polynome $R_{Ci}(z^{-1})$ nach Gl.(2.115)

$$E_{min}\{e_i(k)e_j(k)\} = (1 + \sum_{l=0}^{\kappa_{ij}} r_{Cil}r_{Cjl})\, E\{\varepsilon_i(k)\varepsilon_j(k)\} \; ; \qquad i,j = 1,\ldots,q \; , \quad (2.134)$$

wobei $\kappa_{ij}$ weiterhin nach Gl.(2.133b) festgelegt ist. In diesem Fall folgen die Regelgrößen den Ausgangsgrößen des Parallelmodells mit minimaler Varianz.

## 2.4. Stabilität und Entkopplung

### 2.4.1. Stabilität

Die Frage nach der Stabilität mag zunächst trivial erscheinen, da ja das Regelungssystem so entworfen wird, daß die Regelgrößen den beschränkten Ausgangsgrößen des Parallelmodells folgen. Entsprechend Gl.(2.60) ist aufgrund der asymptotischen Stabilität des Parallelmodells nach Gl.(2.38a,b) bei beschränkten Störungen

$$\|\underline{\varepsilon}(k)\| \leq M_\varepsilon \; ; \quad \|\underline{z}(k)\| < M_z \quad \text{für alle } k \geq 0 \qquad (2.135)$$

der Fehlervektor $\underline{e}$ beschränkt; es gilt

$$|\underline{e}(k)| \leq M_e \quad \text{für alle } k \geq 0 \quad . \tag{2.136}$$

Die Beschränktheit des Vektors $\underline{y}_M$ ist trivial, so daß Gl.(2.19) die Beschränktheit der Regelgrößen mit

$$|\underline{y}(k)| \leq M_y \quad \text{für alle } k \geq 0 \tag{2.137}$$

garantiert.

Stabilität liegt definitionsgemäß aber erst dann vor, wenn alle im Regelkreis auftretenden Signale beschränkt bleiben. Für das dynamische Verhalten der Stellgrößen $\underline{u}$ erhält man über die Gleichung der Regelstrecke, Gl.(2.21), die Beziehung

$$\underline{u}(z) = \underline{D}_e^{-1}(z^{-1})\underline{B}^{-1}(z^{-1})\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\,(\underline{A}(z^{-1})\underline{y}(z) - \underline{C}(z^{-1})\underline{\varepsilon}(z) - \underline{z}(z))$$

bzw.

$$\underline{u}(z) = \operatorname{diag}\{z^{d_i^e}\}\,\frac{\operatorname{adj}\underline{B}(z^{-1})}{\det \underline{B}(z^{-1})}\,\operatorname{diag}\{z^{d_i^a}\}\,\underline{\varphi}(z); \tag{2.138a}$$

mit $i = 1, \ldots, q$

$$\underline{\varphi}(z) = \underline{A}(z^{-1})\underline{y}(z) - \underline{C}(z^{-1})\underline{\varepsilon}(z) - \underline{z}(z) \quad . \tag{2.138b}$$

Aufgrund der beschränkten Störungen nach Gl.(2.135) und der beschränkten Regelgrößen nach Gl.(2.137) ist auch der Signalvektor $\underline{\varphi}$ beschränkt. Die Beschränktheit der Stellgrößen hängt dann offensichtlich von der Lage der Wurzeln des Nennerpolynoms $\det \underline{B}(z^{-1})$ der rechten Seite von Gl.(2.138a) ab. Nach Voraussetzung V 2.3, Gl.(2.36), die bezüglich der Regelstrecke gemacht worden ist, liegen alle diese Wurzeln innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene, so daß auch die Beschränktheit der Stellgröße mit

$$\|\underline{u}(k)\| \leq M_u \quad \text{für alle } k \geq 0 \tag{2.139}$$

gewährleistet ist.

Unter Voraussetzung V2.3 wird also die Stabilität des in Abschnitt 2.2 entworfenen Regelungssystems gewährleistet.

Ist Voraussetzung V2.3 nicht erfüllt, so divergiert entsprechend Gl.(2.138a) mindestens eine Stellgröße $u_i$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$) mit ex-

ponentieller Wachstumsrate, und das Regelungssystem ist instabil.

## 2.4.2. Entkopplung

Betrachtet wird die dem Stellgesetz zugrunde liegende Beziehung Gl.(2.59). Setzt man dort für das Hilfssignal $\underline{u}_d(z)$ Gl.(2.45) ein, so kann das Stellgesetz Gl.(2.61a,b) auch in der Form

$$\underline{u}(z) = z^{-\bar{d}_e}\, \underline{D}_e^{-1}(z^{-1})\, \underline{B}^{-1}(z^{-1}) \cdot (\underline{I} - \underline{R}(z^{-1})z^{-1})^{-1}$$

$$(\underline{B}_M(z^{-1})\, \underline{G}_V(z^{-1})\, \underline{w}(z) + \underline{S}(z^{-1})\, \underline{y}(z))$$

bzw.

$$\underline{u}(z) = z^{-\bar{d}_e}[\underline{B}(z^{-1})\, \underline{D}_e(z^{-1})]^{-1} \cdot \mathrm{diag}\{\frac{1}{(1-R_i(z^{-1})z^{-1})}\}$$

$$(\underline{B}_M(z^{-1})\, \underline{G}_V(z^{-1})\, \underline{w}(z) + \mathrm{diag}\{\underline{S}_i(z^{-1})\}\, \underline{y}(z)) \;;$$

$$i = 1,\ldots,q$$

dargestellt werden. Das zugehörige Blockschaltbild zeigt Bild 2.6. Dort ist deutlich die Entkopplung, die durch den Term $[\underline{B}(z^{-1})\underline{D}_e(z^{-1})]^{-1}$ und durch die Diagonalform der Polynommatrizen $\underline{R}(z^{-1})$ und $\underline{S}(z^{-1})$ bewirkt wird, zu erkennen. Die Entkopplung hat die angenehme Eigenschaft, daß "vollständige Integrität" erreicht wird, d. h. daß die einzelnen Rückführungen des Regelkreises beliebig geöffnet werden können, ohne daß die Funktion der anderen Regelschleifen beeinträchtigt wird. Ferner wirkt sich eine Störung am Ausgang i ($i \in \{1,\ldots,q\}$) der Regelstrecke auch nur auf die Regelgröße $y_i$ und nicht auf die anderen Regelgrößen $y_j$, $j \neq i$, aus. Dies wird auch daran deutlich, daß die Störübertragungsmatrizen $\underline{G}_Z(z^{-1})$ nach Gl.(2.70) und $\underline{G}_\varepsilon(z^{-1})$ nach Gl.(2.97) Diagonalform haben.

Andererseits werden für die Entkopplung häufig sehr große Stellgrößen benötigt, die in der praktischen Anwendung in vielen Fällen nicht zu realisieren sind. Für eine zufriedenstellende Regelung ist die Entkopplung oft unnötig, mitunter ist sie sogar unerwünscht. Der in Abschnitt 2.2 entworfene Regler führt jedoch stets eine Entkopplung durch. Zwar können durch geeignete

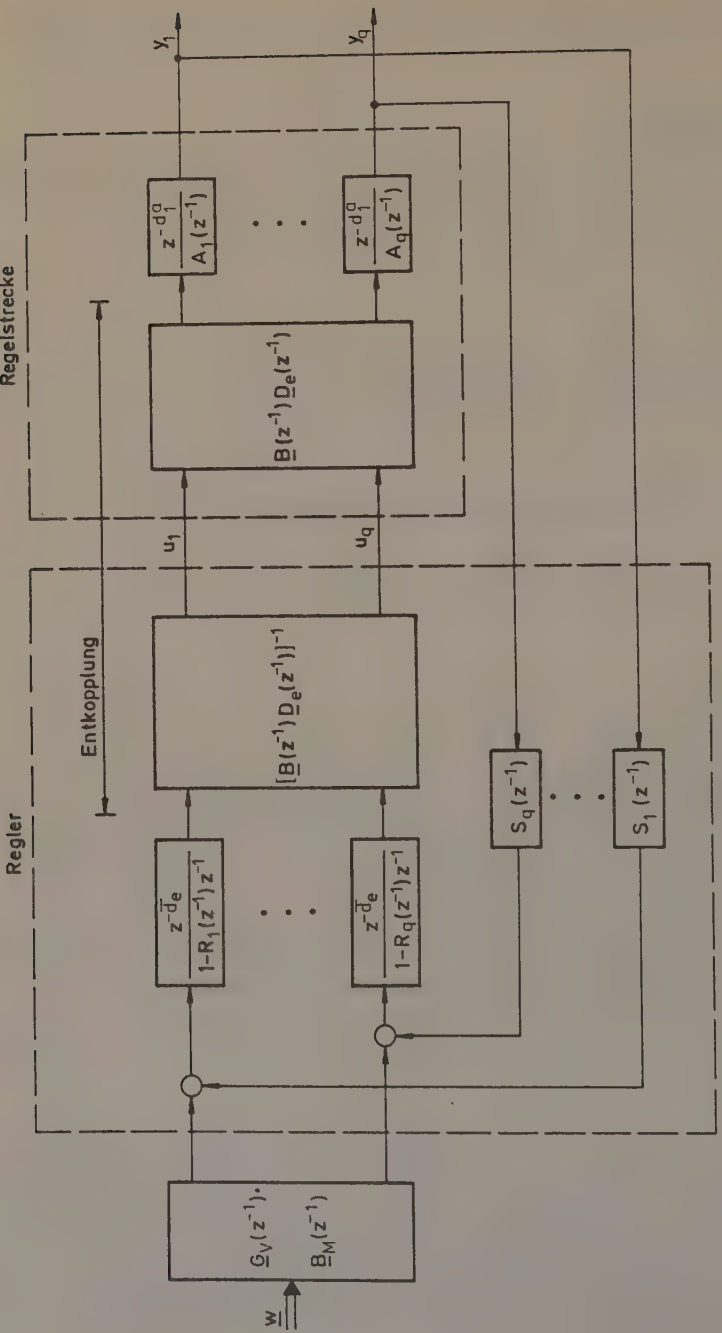



Bild 2.6. Darstellung der durch den Regler nach Abschnitt 2.2 bewirkten Entkopplung

Wahl des Vorfilters die Kopplungen für das Führungsverhalten beliebig definiert werden, aber dies ändert nichts an der entkoppelnden Wirkung des Reglers;anders ausgedrückt: durch den Regler wird die Regelstrecke immer vollständig entkoppelt, so daß für das Führungsverhalten nur noch die Kopplungen des Vorfilters (und evtl. der Polynommatrix $\underline{B}_M(z^{-1})$) zur Wirkung kommen. Will man Entkopplung vermeiden, so muß man den Entwurf des Reglers modifizieren. Eine Möglichkeit dazu wird in Abschnitt 3 diskutiert.

## 2.5. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein linearer Kompensationsregler für Mehrgrößensysteme mit Hilfe des Modellvergleichsverfahrens entworfen. Es zeigt sich, daß dieser Regler eine im Frequenzbereich bereits gut studierte Struktur realisiert.

Stör- und Führungsverhalten können unabhängig voneinander vorgegeben werden. Dabei geht die Polynommatrix, die die Nenner des Parallelmodells enthält, entscheidend in das Störverhalten des Regelkreises ein. Durch eine Erhöhung der Reglerordnung werden zusätzliche Freiheitsgrade geschaffen, mit denen ebenfalls das Störverhalten stark beeinflußt werden kann. Diese Freiheitsgrade können z. B. für die Einführung von Integratoren genutzt werden, um deterministische Störungen auszuregeln. Besteht die Störpolynommatrix der Regelstrecke nur aus Hurwitzpolynomen, so kann man die "Nenner"-Matrix des Parallelmodells gleich dieser Störpolynommatrix wählen. Legt man zusätzlich den Regler mit minimaler Ordnung aus, so erhält man den Minimum-Varianz-Regler direkt als Spezialfall des allgemeinen Regelkonzeptes. Bei festliegendem Störverhalten kann durch das Vorfilter noch ein beliebiges Führungsverhalten eingestellt werden, das allerdings aus Kausalitätsgründen die Schrittverzögerungen der Regelstrecke aufweisen muß.

Der hier vorgeschlagene Kompensationsregler ist nur für eine begrenzte Klasse von Mehrgrößensystemen anwendbar. Aus Stabilitätsgründen muß die Determinante der $\underline{B}$-Matrix, die die erweiterten Zählerpolynome der Regelstrecke enthält, ein Hurwitzpolynom sein.

Denn die Wurzeln dieser Determinante bilden neben den Wurzeln der Nennerpolynome des Parallelmodells die Pole des geschlossenen Kreises. Ferner muß die Regelstrecke vollständig entkoppelbar sein, da mit diesem Regelkonzept immer eine vollständige Entkopplung der Regelstrecke durchgeführt wird. Beide Bedingungen bedeuten eine starke Einschränkung der Anwendbarkeit dieses Kompensationsreglers. Im nächsten Kapitel wird daher das Regelungskonzept so modifiziert, daß es für eine allgemeinere Klasse von Regelstrecken anwendbar ist.

# 3. Der Grundregelkreis mit Korrekturnetzwerk für eine erweiterte Klasse von Regelstrecken mit gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen

## 3.1. Einführung des Korrekturnetzwerkes

Der in Abschnitt 2.2 entworfene Regler eignet sich nur für Regelstrecken, die Voraussetzung V2.3 erfüllen, da sonst das Gesamtsystem instabil ist. In vielen Anwendungsgebieten der Regelungstechnik kommen allerdings Prozesse vor, deren diskretes mathematisches Modell diese Bedingung nicht erfüllt. Dennoch kann häufig auch in solchen Fällen der prinzipielle Entwurfsgedanke des Reglers nach Abschnitt 2.2.4 beibehalten werden, wenn die Struktur in Bild 2.2 modifiziert wird. Diese Modifikation besteht in der Einführung des Korrekturnetzwerks nach Bild 3.1. Das Korrekturnetzwerk, das genau so viele Eingangs- und Ausgangsgrößen besitzt wie die Regelstrecke, wird der Regelstrecke parallel geschaltet. Diese Parallelschaltung - bestehend aus Korrekturnetzwerk und Regelstrecke -

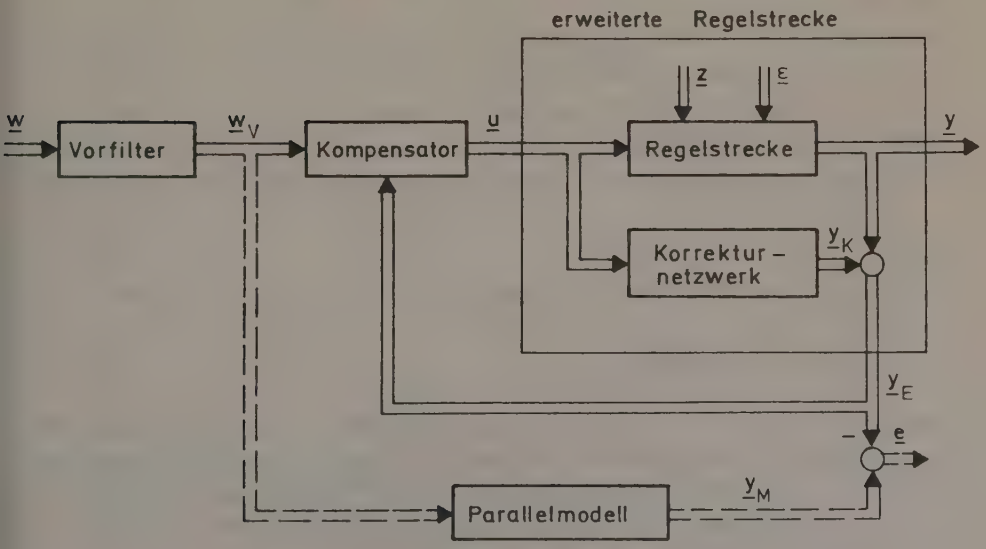



Bild 3.1. Grundstruktur des Regelkreises mit Korrekturnetzwerk

soll als "erweiterte Regelstrecke" bezeichnet werden. Die Ausgangsgrößen der erweiterten Regelstrecke werden mit den Ausgangsgrößen des Parallelmodells verglichen, und es wird ein Kompensator entworfen, so daß die Differenz zwischen den Modellausgangsgrößen und den Ausgangsgrößen der erweiterten Regelstrecke im störungsfreien Fall verschwindet. Dies bedeutet, daß in allen Beziehungen des Abschnitts 2.2.4 die Regelstrecke durch die erweiterte Regelstrecke zu ersetzen ist. Die Voraussetzungen V2.1 bis V2.3 müssen jetzt auch sinngemäß durch die erweiterte Regelstrecke erfüllt werden, was durch eine geeignete Wahl des Korrekturnetzwerks für viele nicht sprungfähige Regelstrecken möglich ist.

Das dynamische Verhalten der Regelgrößen sei weiterhin durch die Gleichungen (2.21) und (2.22a bis e) beschrieben. Mit Gl.(2.43) erhält man daraus mit dem Hilfssignalvektor $\underline{u}_d$

$$\underline{A}(z^{-1})\ \underline{y}(z) = \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\ z^{-\bar{d}_e}\ \underline{u}_d(z) + \underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z). \tag{3.1}$$

Für das dynamische Verhalten des Korrekturnetzwerks wird die Vektorgleichung

$$\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{y}_K(z) = \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})\ z^{-\bar{d}_e}\ \underline{u}_d(z) \tag{3.2}$$

mit

$$\underline{A}_K(z^{-1}) = \underline{I} + \underline{A}_K^*(z^{-1})\ z^{-1} = \text{diag}\ \{A_{Ki}(z^{-1})\};\ i = 1, \ldots, q \tag{3.3a}$$

$$A_{Ki}(z^{-1}) \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1;\ i = 1, \ldots, q \tag{3.3b}$$

$$\underline{B}_K(z^{-1}) = \underline{B}_{KO} + \underline{B}_K^*(z^{-1})\ z^{-1} \tag{3.3c}$$

angesetzt. $\underline{A}_K(z^{-1})$ wird als normierte Diagonalmatrix der Dimension qxq angesetzt. Das Korrekturnetzwerk muß stabil sein (vgl. Abschnitt 3.3.2), so daß alle Elemente $A_{Ki}(z^{-1})$ der "Nenner"-Matrix $\underline{A}_K(z^{-1})$ als Hurwitzpolynome vorgegeben werden. $\underline{B}_K(z^{-1})$ ist eine beliebige Polynommatrix ebenfalls mit der Dimension qxq.

Für das dynamische Verhalten der erweiterten Regelgrößen

$$\underline{y}_E(z) = \underline{y}(z) + \underline{y}_K(z) \tag{3.4}$$

erhält man mit Gl.(3.1) und Gl.(3.2)

$$\underline{y}_E(z) = [\underline{A}^{-1}(z^{-1})\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\ \underline{D}_a(z^{-1})\ B_K(z^{-1})]$$

$$\cdot z^{-\bar{d}_e}\ \underline{u}_d(z) + \underline{A}^{-1}(z^{-1})\ [\underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z^{-1}) + \underline{z}(z)]$$

bzw.

$$\underline{A}_E(z^{-1})\ \underline{y}_E(z^{-1}) = \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}_E(z^{-1})\ z^{-\bar{d}_e}\ \underline{u}_d(z)$$

$$+ \underline{A}_K(z^{-1})\ [\underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z)] \tag{3.5a}$$

mit

$$\underline{A}_E(z^{-1}) = \underline{A}(z^{-1}) \cdot \underline{A}_K(z^{-1})$$

$$= \text{diag}\ \{A_i(z^{-1})\ A_{Ki}(z^{-1})\};\quad i = 1, \ldots, q \tag{3.5b}$$

$$\underline{B}_E(z^{-1}) = [\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})]. \tag{3.5c}$$

Soll nun der Kompensationsalgorithmus nach Abschnitt 2.2 erfolgreich auf die erweiterte Regelstrecke angewandt werden, so gehen die Voraussetzungen V2.2, Gl.(2.29), und V2.3, Gl.(2.36), in die Bedingungen

$$\det \underline{B}_E(z^{-1})\Big|_{z^{-1}=0} = \det\ (\underline{B}_0 + \underline{B}_{K0}) \neq 0 \tag{3.6}$$

und

$$\det \underline{B}_E(z^{-1}) = \det[\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})] \neq 0$$

$$\text{für alle } |z| \geq 1 \tag{3.7}$$

über. Durch geeignete Wahl des Korrekturnetzwerkes können Gl.(3.6) und Gl.(3.7) auch für Regelstrecken erfüllt werden, die den Voraussetzungen V2.2, Gl.(2.29), und V2.3, Gl.(2.36), nicht genügen. Wie dies erreicht werden kann, wird in Abschnitt 3.5 gezeigt.

Selbstverständlich ist das Korrekturnetzwerk ein Teil des Reglers, so daß vom Standpunkt der Implementierung aus von einem "erweiterten Regler" und nicht von einer "erweiterten Regelstrecke" die Rede sein müßte. Der Begriff der "erweiterten Regelstrecke" ist hier nur methodisch zu betrachten. Gedanklich wird eine Regelstrecke, die die Voraussetzungen V2.2 und V2.3 nicht erfüllt, durch eine Struktur - eben die "erweiterte Regelstrecke" - ersetzt, die diesen Voraussetzungen genügt, um den Kompensatorentwurf nach Abschnitt 2.2.4 wieder anwenden zu können. Damit wird letztendlich ein unbekanntes Problem auf ein bekanntes zurückgeführt.

Es ist nicht effektiv, den Regler - bestehend aus Korrekturnetzwerk und Kompensator - so zu realisieren, daß man den Kompensator für die erweiterte Regelstrecke als Ganzes entwirft. Vielmehr ist es günstiger, den Kompensator in zwei Teile aufzuspalten, wovon ein Teil nur von den Parametern des Korrekturnetzwerkes abhängig ist. Dies hat bei der adaptiven Auslegung des Reglers den Vorteil, daß dieser Teil des Kompensators nicht im Schätzalgoritzmus berücksichtigt werden muß, was eine deutliche Aufwandsersparnis bedeutet (Hahn und Unbehauen (1982)). Wie eine solche Aufteilung des Kompensators geschehen kann, wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

## 3.2. Der Entwurf des Reglers

Betrachtet wird die Struktur nach Bild 3.1. Ähnlich wie in Kapitel 2 soll der Regler so entworfen werden, daß

1. die Ausgangsgrößen $\underline{y}_E$ der erweiterten Regelstrecke den Ausgangsgrößen $\underline{y}_M$ des Parallelmodells im störungsfreien Fall folgen und

2. eine unabhängige Beeinflussung der Stördynamik möglich ist.

Die Regelstrecke ist weiterhin durch die Gleichungen (2.21) und (2.22a bis e) und das Parallelmodell durch die Gleichungen (2.37) und (2.38a bis c) definiert. Für den natürlichen Fehler

$$\begin{aligned} \underline{e}(z) &= \underline{y}_M(z) - \underline{y}_E(z) \\ &= \underline{y}_M(z) - \underline{y}(z) - \underline{y}_K(z) \end{aligned} \tag{3.8}$$

erhält man dann nach Multiplikation mit $\underline{A}_M(z^{-1})$ von links unter Berücksichtigung von Gln.(2.21), (2.22a), (2.37), (2.38a), (3.2) und (3.3a)

$$\begin{aligned} \underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{e}(z) = {} & z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}_M(z^{-1})\ \underline{w}_v(z) \\ & + \underline{\Delta A}^*(z^{-1})\ z^{-1}\ \underline{y}(z) - \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\ \underline{D}_e(z^{-1})\ \underline{u}(z) \\ & + \underline{\Delta A}^*_K(z^{-1})\ z^{-1}\ \underline{y}_K(z) - z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})\ \underline{u}_d(z) \\ & - \underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) - \underline{z}(z) \end{aligned}$$

bzw. mit Gl.(2.43)

$$\begin{aligned} \underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{e}(z) = {} & z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ [\underline{B}_M(z^{-1})\ \underline{w}_v(z) \\ & - (\underline{B}(z^{-1}) + \underline{B}_K(z^{-1}))\ \underline{u}_d(z) \\ & + z^{\bar{d}_e - 1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{\Delta A}^*(z^{-1})\ \underline{y}(z) \\ & + z^{\bar{d}_e - 1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{\Delta A}^*_K(z^{-1})\ \underline{y}_K(z)] \\ & - \underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) - \underline{z}(z), \end{aligned} \tag{3.9}$$

wobei

$$\begin{aligned} \underline{\Delta A}^*_K(z^{-1}) &= \underline{A}^*_K(z^{-1}) - \underline{A}^*_M(z^{-1}) \\ &= \text{diag}\ \{\Delta A^*_{Ki}(z^{-1})\};\ i = 1, \ldots q \end{aligned} \tag{3.10}$$

ist. Für den Term $z^{\bar{d}_e-1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{\Delta A}^*(z^{-1})\ \underline{y}(z)$ wird nun wieder Gl. (2.49) eingesetzt. Für die Signale $z^{\bar{d}_e-1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{\Delta A}_K^*(z^{-1})\ \underline{y}_K(z)$ gilt die Identität

$$z^{\bar{d}_e-1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{\Delta A}_K^*(z^{-1})\ \underline{y}_K(z) = \underline{S}_K(z^{-1})\ \underline{y}_K(z) + \underline{R}_K(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})\ z^{-1}\ \underline{u}_d(z) \tag{3.11}$$

mit

$$\underline{\Delta A}_K^*(z^{-1}) = z^{-\bar{d}_e+1}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{S}_K(z) + \underline{R}_K(z^{-1})\ \underline{A}_K(z^{-1}). \tag{3.12}$$

Diese Identität kann leicht bewiesen werden, indem für den Term $\underline{B}_K(z^{-1})\ z^{-1}\ \underline{u}_d(z)$ in Gl.(3.11) der nach Gl.(3.2) äquivalente Ausdruck $z^{\bar{d}_e-1}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{A}_K(z)\ \underline{y}_K(z)$ eingesetzt wird. Da $\underline{A}_K(z^{-1})$ und $\underline{\Delta A}_K^*(z^{-1})$ Diagonalmatrizen sind, können auch $\underline{S}_K(z^{-1})$ und $\underline{R}_K(z^{-1})$ als Diagonalmatrizen

$$\underline{S}_K(z^{-1}) = \text{diag}\ \{S_{Ki}(z^{-1})\};\ i = 1, \ldots, q \tag{3.13a}$$

$$\underline{R}_K(z^{-1}) = \text{diag}\ \{R_{Ki}(z^{-1})\};\ i = 1, \ldots, q \tag{3.13b}$$

angesetzt werden. Die Polynome $S_{Ki}(z^{-1})$ und $R_{Ki}(z^{-1})$ ergeben sich entsprechend Gl.(3.12) als Lösungen der diophantischen Gleichungen

$$\Delta A_{Ki}^*(z^{-1}) = z^{-\bar{d}_e-d_i^a+1}\ S_{Ki}(z^{-1}) + R_{Ki}(z^{-1})\ A_K(z^{-1});\ i = 1, \ldots, q. \tag{3.14}$$

Die Lösung von Gleichungen dieses Typs wird in Anhang A1 diskutiert. Nach Gl.(A1.6) und Gl.(A1.8) erhält man für die Polynome $S_{Ki}(z^{-1})$ und $R_{Ki}(z^{-1})$ die Grade

$$n(R_{Ki}) = \bar{d}_e + d_i^a - 2 + n_{R_{Ki}},\ n_{R_{Ki}} = 0, 1, 2, \ldots;\ i = 1, \ldots, q \tag{3.15a}$$

$$n(S_{Ki}) = \max \{n(\Delta A^*_{Ki}) - (\bar{d}_e + d^a_i - 2),$$

$$n(A_{Ki}) + n_{R_K i} - 1\}; \; i = 1, \ldots, q \,. \qquad (3.15b)$$

Im Prinzip wird formal für die Signale $z^{d_e-1}\, \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\, \underline{\Delta A}^*_K(z^{-1})\, \underline{y}_K(z)$ die gleiche "Prädiktion" durchgeführt wie für die Signale $z^{\bar{d}_e-1} \cdot \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\, \underline{\Delta A}^*(z^{-1})\, \underline{y}(z)$ in Abschnitt 2.2.4. Der entscheidende physikalische Unterschied ist, daß der Ausgangsvektor $\underline{y}_K$ des Korrekturnetzwerkes nicht gestört ist, so daß in diesem Fall kein Prädiktionsfehler auftritt.

Mit Gl.(2.49), Gl.(2.51) und Gl.(3.11) ergibt sich aus Gl.(3.9)

$$\begin{aligned} \underline{A}_M(z^{-1})\, \underline{e}(z) = z^{-\bar{d}_e}\, \underline{D}_a(z^{-1}) \Big[ & \underline{B}_M(z^{-1})\, \underline{w}_V(z) \\ & - \{(\underline{I} - \underline{R}(z^{-1})\, z^{-1})\, \underline{B}(z^{-1}) \\ & \quad + (\underline{I} - \underline{R}_K(z^{-1})\, z^{-1})\, \underline{B}_K(z^{-1})\}\, \underline{u}_d(z) \\ & + \underline{S}(z^{-1})\, \underline{y}(z) + \underline{S}_K(z^{-1})\, \underline{y}_K(z) \Big] \\ & - (\underline{I} - \underline{R}(z^{-1})\, z^{-1})\, (\underline{C}(z^{-1})\, \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z)). \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Die erste Forderung, die der Regler erfüllen soll, läßt sich mathematisch wieder durch die Kompensationsbedingung

$$\underline{e}(z) \equiv \underline{0} \text{ für } \underline{\varepsilon}(z) \equiv \underline{0} \text{ und } \underline{z}(z) \equiv \underline{0}$$

ausdrücken. Diese ist offensichtlich dann erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} & \{(I - \underline{R}(z^{-1})\, z^{-1})\, \underline{B}(z^{-1}) + (I - \underline{R}_K(z^{-1})\, z^{-1})\, \underline{B}_K(z^{-1})\}\, \underline{u}_d(z) = \\ & = \underline{B}_M(z^{-1})\, \underline{w}_V(z) + \underline{S}(z^{-1})\, \underline{y}(z) + \underline{S}_K(z^{-1})\, \underline{y}_K(z) \end{aligned} \qquad (3.17)$$

ist. Dies führt auf das Stellgesetz

$$\begin{aligned} \underline{u}_d(z) = (\underline{B}_0 + \underline{B}_{K0})^{-1} & [\underline{B}_M(z^{-1})\, \underline{w}_V(z) \\ & + \{-\underline{B}^*(z^{-1}) + \underline{R}(z^{-1})\, \underline{B}(z^{-1}) - \underline{B}^*_K(z^{-1}) + \underline{R}_K(z^{-1})\, \underline{B}_K(z^{-1})\}\, z^{-1}\, \underline{u}_d(z) \end{aligned}$$

$$+ \underline{S}(z^{-1})\ \underline{y}(z) + \underline{S}_K(z^{-1})\ \underline{y}_K(z)] \qquad (3.18)$$

$$\underline{u}(z) = z^{-\overline{d}_e}\ \underline{D}_e(z^{-1})\ \underline{u}_d(z). \qquad (2.61b)$$

Das Blockschaltbild Bild 3.2 zeigt, daß die Einführung des Korrekturnetzwerkes auf eine zusätzliche Rückführung der Hilfssignale $\underline{u}_d$ hinausläuft (vgl. dazu Bild 2.4). Diese zusätzliche Rückführung ist dabei vollständig unabhängig von den Parametern der Regelstrecke, was bei dem später zu entwerfenden adaptiven Regler eine besondere Rolle spielt.

Durch das Stellgesetz Gl.(3.18) und Gl.(2.61b) erhält man wie im Fall ohne Korrekturnetzwerk für das dynamische Verhalten des Fehlervektors

$$\underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{e}(z) = -(\underline{I}-\underline{R}(z^{-1})\ z^{-1})\,(\underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z)), \qquad (3.19)$$

wobei jetzt allerdings dieser Fehlervektor entsprechend Gl.(3.8) die Differenz zwischen den Ausgangsgrößen des Parallelmodells und der *erweiterten* Regelstrecke beschreibt.

Die in diesem Abschnitt durchgeführten Berechnungen sind direkte Verallgemeinerungen der entsprechenden Beziehungen aus Abschnitt 2.2. Der Regler ohne Korrekturnetzwerk ergibt sich aus diesem Abschnitt als Spezialfall mit $\underline{B}_K(z^{-1}) = \underline{O}$ und $\underline{A}_K(z^{-1}) = \underline{I}$.

## 3.3. Diskussion des dynamischen Verhaltens der Regelgrößen

### 3.3.1. Mathematische Ableitung des dynamischen Verhaltens

Das dynamische Verhalten der Regelgrößen läßt sich entsprechend Gl.(3.8) durch die Beziehung

$$\underline{y}(z) = \underline{y}_M(z) - \underline{y}_K(z) - \underline{e}(z) \qquad (3.20)$$

beschreiben. Mit den Gleichungen (2.37), (2.39), (3.2) und (3.19) ergibt sich daraus

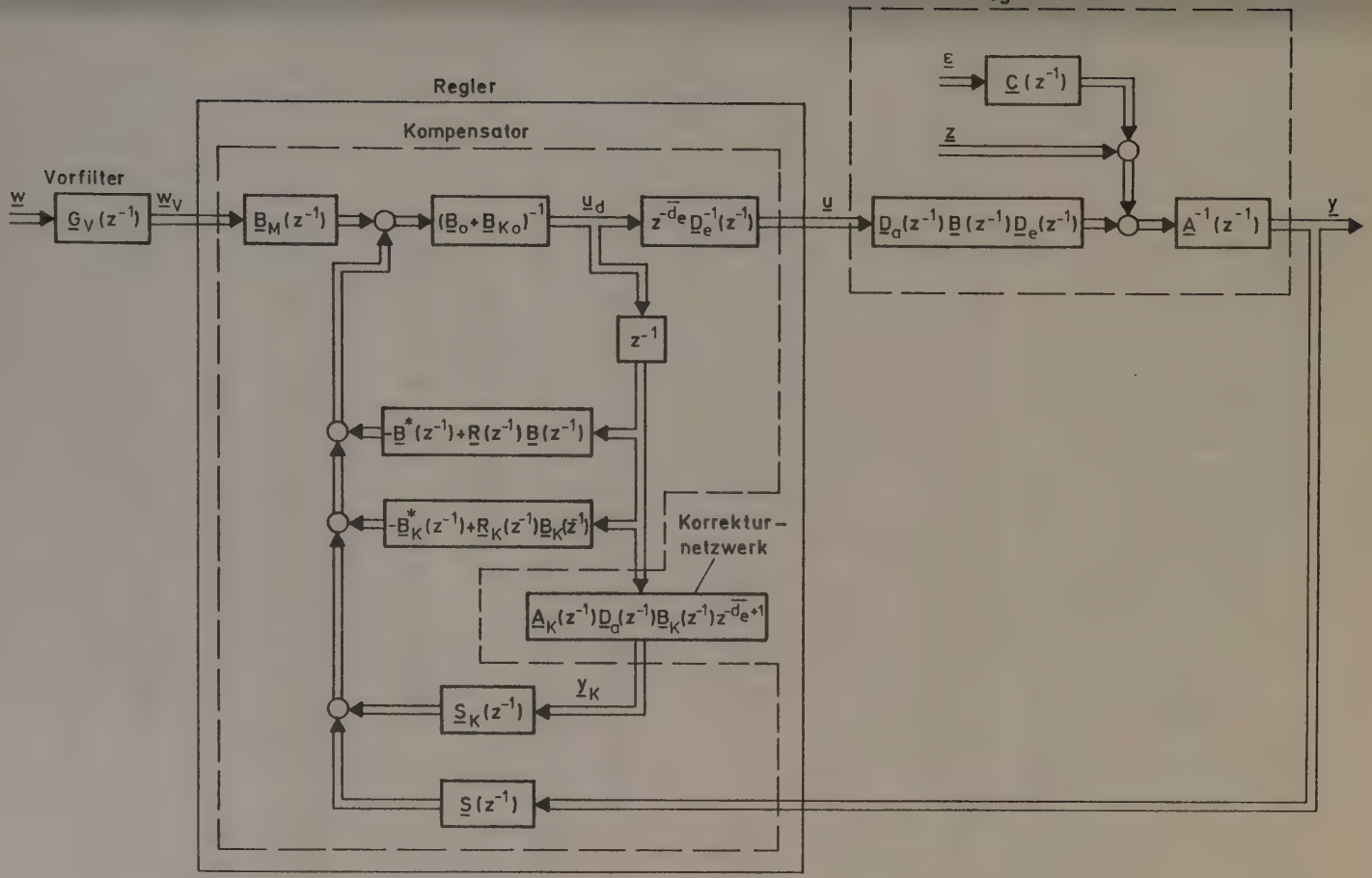



Bild 3.2. Struktur des Grundregelkreises mit Korrekturnetzwerk

$$\underline{y}(z) = \underline{A}_M^{-1}(z)\, z^{-\bar{d}_e}\, \underline{D}_a(z^{-1})\, \underline{B}_M(z^{-1})\, \underline{G}_V(z^{-1})\, \underline{w}(z)$$
$$- \underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\, z^{-\bar{d}_e}\, \underline{D}_a(z^{-1})\, \underline{B}_K(z^{-1})\, \underline{u}_d(z)$$
$$+ \underline{A}_M^{-1}(z^{-1})(\underline{I}-\underline{R}(z)\, z^{-1}))(\underline{C}(z^{-1})\, \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z)). \qquad (3.21)$$

Löst man Gl.(3.5a) nach $\underline{u}_d(z)$ auf und setzt das Ergebnis in Gl.(3.21) ein, so erhält man

$$\underline{y}(z) = \underline{A}_M^{-1}(z^{-1})\, z^{-\bar{d}_e}\, \underline{D}_a(z^{-1})\, \underline{B}_M(z^{-1})\, \underline{G}_V(z^{-1})\, \underline{w}(z)$$
$$- \underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\, z^{-\bar{d}_e}\, \underline{D}_a(z^{-1})\, \underline{B}_K(z^{-1}) \cdot \underline{B}_E^{-1}(z^{-1}) \cdot$$
$$\cdot\, z^{\bar{d}_e}\, \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\, \underline{A}_E(z^{-1})\, \underline{y}_E(z)$$
$$+ [\underline{A}_M^{-1}(z^{-1})(\underline{I}-\underline{R}(z^{-1})\, z^{-1}) + \underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\, z^{-\bar{d}_e}\, \underline{D}_a(z^{-1})$$
$$\underline{B}_K(z^{-1})\, \underline{B}_E^{-1}(z^{-1})\, z^{\bar{d}_e}\, \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\, \underline{A}_K(z^{-1})](\underline{C}(z^{-1})\, \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z)) \qquad (3.22)$$

Nun ist nach Gl.(3.8), Gl.(2.37), Gl.(2.39) und Gl.(3.19)

$$\underline{y}_E(z) = \underline{y}_M(z) - \underline{e}(z)$$
$$= \underline{A}_M^{-1}(z^{-1})\, z^{-\bar{d}_e}\, \underline{D}_a(z^{-1})\, \underline{B}_M(z^{-1})\, \underline{G}_V(z)\, w(z)$$
$$+ \underline{A}_M^{-1}(z^{-1})\, (\underline{I}-\underline{R}(z^{-1})\, z^{-1})\, (\underline{C}(z^{-1})\, \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z)). \qquad (3.23)$$

Ersetzt man die Signale $\underline{y}_E(z)$ in Gl.(3.22) durch die rechte Seite von Gl.(3.23), so ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl.(3.5b,c)

$$\underline{y}(z) = z^{-\bar{d}_e}\, \underline{D}_a(z^{-1}) \Big[\underline{I}-\underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\, \underline{B}_K(z^{-1}) \cdot$$
$$[\underline{A}_K(z^{-1})\, \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\, \underline{B}_K(z^{-1})]^{-1}\, \underline{A}(z^{-1})\, \underline{A}_K(z^{-1})\Big] \cdot$$
$$\underline{A}_M^{-1}(z^{-1})\, \underline{B}_M(z^{-1})\, \underline{G}_V(z^{-1})\, \underline{w}(z) +$$

$$+ \Big[\underline{I}-\underline{R}(z^{-1})\ z^{-1} + \\ + \underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\ z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1}) \cdot \\ [\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})]^{-1}\ z^{\bar{d}_e}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{A}_K(z^{-1}) \cdot \\ [-\underline{A}(z^{-1})(\underline{I}-\underline{R}(z^{-1})\ z^{-1}) + \underline{A}_M(z^{-1})]\Big] \cdot \\ \underline{A}_M^{-1}(z^{-1})\ [\underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z)], \qquad (3.24)$$

wobei die Kommutativität der Diagonalmatrixprodukte ausgenutzt worden ist. Nach Gl.(2.42) und Gl.(2.52) gilt die Identität

$$\underline{A}(z^{-1}) - \underline{A}_M(z^{-1}) - \underline{A}(z^{-1})\ \underline{R}(z^{-1})\ z^{-1} \\ = [\underline{\Delta A}^*(z^{-1}) - \underline{A}(z^{-1})\ \underline{R}(z^{-1})]\ z^{-1} \\ = z^{-d_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{S}(z^{-1}), \qquad (3.25)$$

so daß letztendlich aus Gl.(3.24) folgt

$$\underline{y}(z) = z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1}) \Big[\underline{I}-\underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1}) \cdot \\ [\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})]^{-1}\ \underline{A}(z^{-1})\ \underline{A}_K(z^{-1})\Big] \cdot \\ \underline{A}_M^{-1}(z^{-1})\ \underline{B}_M(z^{-1})\ \underline{G}_V(z^{-1})\ \underline{w}(z) + \\ + \Big[\underline{I}-\underline{R}(z^{-1})\ z^{-1} + \\ - \underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\ z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1}) \cdot \\ [\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})]^{-1}\ \underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{S}(z^{-1})\Big] \cdot \\ \underline{A}^{-1}(z^{-1})\ [\underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z)]. \qquad (3.26)$$

Aus Gl.(3.26) läßt sich das Führungs- und Störverhalten ablesen. Auch bei dem Regler mit Korrekturnetzwerk ist das Störverhalten unabhängig von dem Vorfilter und der "Zähler"-Matrix $\underline{B}_M(z^{-1})$ des Re-

ferenzmodells (vgl. hierzu auch Bild 3.2). Das heißt, Stör- und Führungsverhalten können unabhängig voneinander festgelegt werden. Das Korrekturnetzwerk geht dabei allerdings in beide ein.

Aufgrund ihrer Komplexität eignet sich Gl.(3.26) nicht für den Entwurf der Regelung, läßt aber dennoch einige interessante Rückschlüsse zu, die im folgenden erörtert werden.

### 3.3.2. Stabilität

Zunächst soll die Stabilität des Regelsystems diskutiert werden. Da die Ausgangsgrößen $\underline{y}_M$ des Parallelmodells und der Fehlervektor $\underline{e}$ bei beschränkten Störungen beschränkt sind, gilt dies auch für die erweiterten Regelgrößen $\underline{y}_E$. Da das Korrekturnetzwerk so entworfen wird, daß Gl.(3.7) erfüllt ist, folgt nach Gl.(3.5a) aus der Beschränktheit der Signale $\underline{y}_E$ die Beschränktheit der Signale $\underline{u}_d$ und damit der Stellgrößen. Aus der Stabilität des Korrekturnetzwerkes ergibt sich dann, daß auch die Signale $\underline{y}_K$ beschränkt sind. Nach Gl.(3.4) sind damit auch die Regelgrößen $\underline{y}$ beschränkt. Das Gesamtsystem ist also stabil. Die Stabilität des Regelungssystems geht direkt aus Gl.(3.26) hervor. Außer etwaigen Polen bei $z = 0$, die von den Totzeiten $z^{-\bar{d}_e}$ $\underline{D}_a(z^{-1})$ herrühren, sind die Pole des geschlossenen Kreises durch die Gleichungen

$$\det \underline{A}_K(z^{-1}) = 0 \tag{3.27a}$$

$$\det [\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})] = 0 \tag{3.27b}$$

$$\det \underline{A}_M(z^{-1}) = 0 \tag{3.27c}$$

festgelegt. Aufgrund von Gl.(2.38b), Gl.(3.3b) und Gl.(3.7) liegen sämtliche Wurzeln von Gl.(3.27a bis c) im Einheitskreis der z-Ebene. Aus Gl.(3.27a) ist ersichtlich, daß das Korrekturnetzwerk stabil sein muß.

### 3.3.3. Regler mit stationärer Genauigkeit

Durch den Einsatz des in Abschnitt 3.2 entworfenen Reglers wird erreicht, daß im störungsfreien Fall die Ausgangsgrößen der erweiterten Regelstrecke den Ausgangsgrößen des Parallelmodells exakt folgen. Alle in Abschnitt 2.3 bezüglich der Regelgrößen gemachten Aussagen lassen sich jetzt direkt auf die erweiterten Regelgrößen übertragen. Eine Aussage über die Dynamik der Regelgrößen selbst ist zwar mit Hilfe von Gl.(3.26) möglich, aber aufgrund der Komplexität dieser Gleichung wenig anschaulich. Das stationäre Verhalten der Regelgrößen läßt sich mittels des Grenzwertsatzes der $\mathcal{Z}$-Transformation jedoch einfach aus Gl.(3.26) ermitteln. Es ist sinnvoll, das Korrekturnetzwerk so zu entwerfen, daß für ein bestimmtes, a priori angenommenes stationäres Verhalten der Sollwerte und der deterministischen Störungen die Regelgrößen für große Zeiten den Ausgangsgrößen des Parallelmodells folgen. Entsprechend Gl.(3.8) müssen dann der Fehlervektor $\underline{e}$ und die Ausgangsgrößen $\underline{y}_K$ des Korrekturnetzwerks gegen Null konvergieren. Dieses Verhalten wird als "stationäre Genauigkeit" bezeichnet.

Es wird angenommen, daß eine natürliche Zahl $n_z$ existiert, so daß

$$\lim_{k\to\infty} \underline{w}(k) = \underline{w}^* \, k^{n_z} \tag{3.28a}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} \underline{z}(k) = \underline{z}^* \, k^{n_z} \tag{3.28b}$$

ist, d. h. für große Zeiten wachsen die Sollwerte und die deterministischen Störungen betragsmäßig höchstens mit der $n_z$-ten Potenz der Zeit an. In der Praxis genügt es häufig, sprungförmige Sollwertänderungen und Störungen anzunehmen, d. h. $n_z = 0$. Der Grenzwertsatz der $\mathcal{Z}$-Transformation, angewandt auf Gl.(3.28a,b), liefert

$$\lim_{z\to 1} (1-z^{-1})^{n_z+1} \, \underline{w}(z) = \underline{w}^* \tag{3.29a}$$

und

$$\lim_{z\to 1} (1-z^{-1})^{n_z+1}\ \underline{z}(z) = \underline{z}^* \tag{3.29b}$$

bzw.

$$\lim_{z\to 1} (1-z^{-1})^{n_z+2}\ \underline{w}(z) = \underline{0} \tag{3.30a}$$

und

$$\lim_{z\to 1} (1-z^{-1})^{n_z+2}\ \underline{z}(z) = \underline{0}\,. \tag{3.30b}$$

Da der geschlossene Regelkreis mit Korrekturnetzwerk stabil ist, erhält man das stationäre Verhalten der Regelgrößen $\underline{y}$ durch Anwendung des Grenzwertsatzes der $\mathcal{Z}$-Transformation aus Gl.(3.26). Unter Berücksichtigung von Gl.(2.37) und Gl.(2.39) ergibt sich für rein deterministische Störungen ($\underline{\varepsilon}(z) \equiv \underline{0}$)

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \underline{y}(k) &= \lim_{k\to\infty} \underline{y}_M(k) + \\ &+ \lim_{z\to 1} \{(1-z^{-1})\cdot z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1}) \\ &\quad \Big[-\underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})\ [\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})]^{-1}\cdot \\ &\quad \underline{A}(z^{-1})\ \underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{A}_M^{-1}(z^{-1})\ \underline{B}_M(z^{-1})\ \underline{G}_V(z^{-1})\ \underline{w}(z) + \\ &\quad + [\underline{I} - \underline{R}(z^{-1})\ z^{-1} + \\ &\quad\quad - \underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})\ [\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})]^{-1}\cdot \\ &\quad\quad \underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{S}(z^{-1})]\ \underline{A}_M^{-1}(z^{-1})\ \underline{z}(z)\Big]\}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Stationäre Genauigkeit wird erreicht, wenn der in Gl.(3.31) unterstrichene Term Null ist. Dies trifft nach Gl.(3.30a,b) dann zu, falls die Zerlegungen

$$\underline{B}_K(z^{-1}) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\ \underline{B}'_K(z^{-1})$$

$$= (1-z^{-1})^{n_z+1}\ (\underline{B}'_{KO} + \underline{B}'^{*}_K(z^{-1})\ z^{-1}) \qquad (3.32a)$$

und

$$\underline{I}-\underline{R}(z^{-1})\ z^{-1} = (1-z^{-1})^{n_z+1}\ \underline{Q}'(z^{-1}) \qquad (3.32b)$$

existieren. Das heißt, alle Zählerpolynome des Korrekturnetzwerkes und alle Elemente der Matrix $\underline{I}-\underline{R}(z^{-1})\ z^{-1}$ müssen unter der Annahme nach Gl.(3.28a,b) für stationäre Genauigkeit eine $(n_z+1)$-fache Wurzel bei $z = 1$ haben. Die Bedingung nach Gl.(3.32b), die unabhängig vom Korrekturnetzwerk nur für das Störverhalten Bedeutung hat, ist bereits in Abschnitt 2.3.2.1 behandelt worden. Sie ist immer durch eine Graderhöhung der Polynome $R_i(z^{-1})$ zu erfüllen und läuft auf die Einführung eines $(n_z+1)$-fachen Integrators hinaus.

Wie im Fall ohne Korrekturnetzwerk (vgl. Abschnitt 2.3.2.1) ist es auch in diesem Fall für die Realisierung günstiger, zunächst das $(n_z+1)$-fache I-Verhalten zur Regelstrecke zu schlagen und für den weiteren Entwurf des Reglers direkt von Gl.(2.86) auszugehen. Mit

$$\underline{u}_{dI}(z) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\ \underline{u}_d(z) \qquad (3.33)$$

folgt aus Gl.(2.86)

$$\underline{A}_I(z^{-1})\ \underline{Y}(z) = \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\ z^{-\bar{d}_e}\ \underline{u}_{dI}(z)$$

$$+ [\underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}_I(z) + \underline{z}_I(z)]. \qquad (3.34)$$

Für Korrekturnetzwerke, die Gl.(3.32a) erfüllen, ergibt sich entsprechend Gl.(3.2), Gl.(3.32a) und Gl.(3.33)

$$\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{Y}_K(z) = \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}'_K(z^{-1})\ z^{-\bar{d}_e}\ \underline{u}_{dI}(z). \qquad (3.35)$$

Ersetzt man nun in allen Gleichungen des Abschnitts 3.2 die Größen $\underline{A}(z^{-1})$, $\underline{u}(z)$, $\underline{\varepsilon}(z)$, $\underline{z}(z)$, $\underline{B}_K(z^{-1})$ und $\underline{u}_d(z)$ durch die modifizier-

ten Größen $\underline{A}_I(z^{-1})$, $\underline{u}_I(z)$, $\underline{\varepsilon}_I(z)$ $\underline{z}_I(z)$ (nach Gl.(2.87a bis d)), $\underline{B}'_K(z^{-1})$ und $\underline{u}_{dI}(z)$, so ergibt sich das zu Gl.(3.18) und Gl.(2.61b) äquivalente Stellgesetz

$$\begin{aligned}\underline{u}_{dI}(z) = (\underline{B}_O + \underline{B}'_{KO})^{-1} \; [&\underline{B}_M(z^{-1})\; w_V(z) \\ &+ \{-\underline{B}^*(z^{-1}) + \underline{R}_I(z^{-1})\; \underline{B}(z^{-1}) \\ &\quad -\underline{B}'^*_K(z^{-1}) + \underline{R}_K(z^{-1})\; \underline{B}'_K(z^{-1})\}\; z^{-1}\; \underline{u}_{dI}(z) \\ &+ \underline{S}_I(z^{-1})\; \underline{y}(z) + \underline{S}_K(z^{-1})\; \underline{y}_K(z)]\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\underline{u}(z) = z^{-\bar{d}_e}\, \underline{D}_e^{-1}(z^{-1}) \cdot \frac{\underline{u}_{dI}(z)}{(1-z^{-1})^{n_z+1}} \tag{3.37}$$

für den stationär genauen Regler. Die Polynommatrizen $\underline{R}_I(z^{-1})$ und $\underline{S}_I(z^{-1})$ sind Diagonalmatrizen, deren Elemente die diophantische Gleichung (2.92) (für i = 1, ..., q) erfüllen. Der Vorteil von Gl. (3.36) und Gl.(3.37) liegt darin, daß der $(n_z+1)$-fache Integrator leicht explizit realisiert werden kann, wie dies im Blockschaltbild Bild 3.3 gezeigt ist.

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß für den stationär genauen Regler, d. h. den Regler, durch den Gln.(3.32a,b) erfüllt werden, das Stellgesetz nach Gl.(3.36) und Gl.(3.37) mit dem Stellgesetz nach Gl.(3.18) und Gl.(2.61b) physikalisch identisch ist und lediglich eine einfachere Realisierung des Reglers bedeutet. Konsequenterweise müssen in diesem Fall auch die Bedingungen Gl.(3.6) die die Realisierbarkeit des Reglers garantiert, und Gl.(3.7), die die Bedeutung einer Stabilitätsbedingung hat, zu den Bedingungen

$$\det(\underline{B}_O + \underline{B}'_{KO}) \neq 0 \tag{3.38}$$

und

$$\det\,[\underline{A}_K(z^{-1})\; \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}_I(z^{-1})\; \underline{B}'_K(z^{-1})] \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1 \tag{3.39}$$

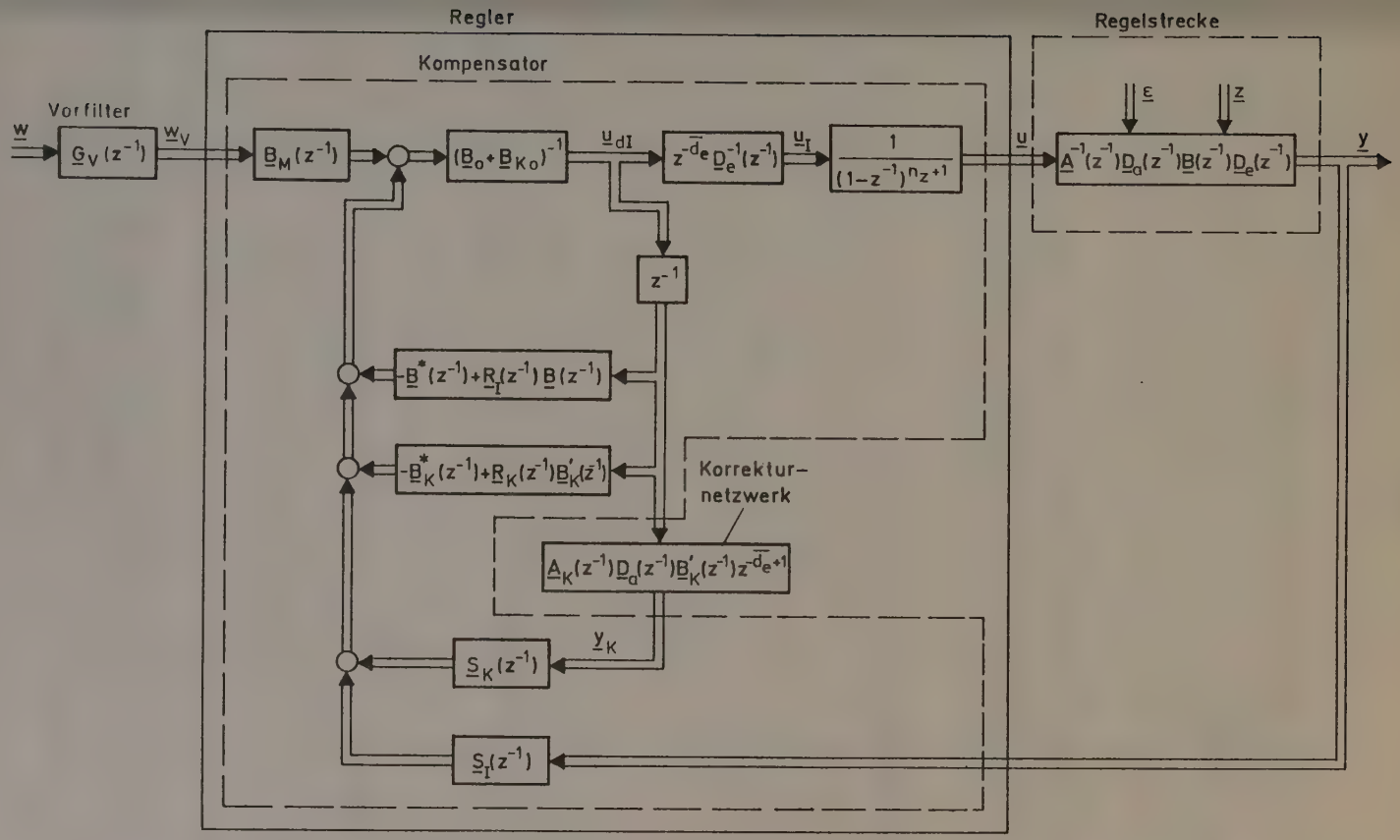



Bild 3.3. Struktur des Grundregelkreises für den stationär genauen Regler mit explizitem $(n_z+1)$-fachen I-Verhalten

modifiziert werden. Da aber nach Gl.(3.32a)

$$\underline{B}'_{KO}(z^{-1}) = \underline{B}_{KO} \tag{3.40}$$

und nach Gl.(2.87a) und Gl.(3.32a)

$$\underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1}) = \underline{A}_I(z^{-1})\ \underline{B}'_K(z^{-1}) \tag{3.41}$$

gilt, ist Gl.(3.38) mit Gl.(3.6) und Gl.(3.39) mit Gl.(3.7) identisch.

### 3.3.4. Entkopplung und Stellverhalten

Mit dem Regler mit Korrekturnetzwerk wird keine Entkopplung der Regelstrecke durchgeführt. Dies ist leicht einzusehen, wenn man das prinzipielle Blockschaltbild Bild 3.1 betrachtet und die Aussagen nach Abschnitt 2.4 jetzt sinngemäß auf die erweiterten Regelgrößen bezieht. Der Regler entkoppelt somit die erweiterte Regelstrecke, d. h. die Parallelschaltung aus Regelstrecke und Korrekturnetzwerk. Daraus folgt sofort, daß die Regelstrecke selbst nicht mehr entkoppelt wird. In Gl.(3.26) wird dies dadurch deutlich, daß der Faktor $\underline{B}_k(z^{-1})\ [\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})]^{-1}$ keine Diagonalmatrix mehr ist.[1] Für eine spezielle Klasse von Regelstrecken ist es jedoch möglich, durch die Wahl des Vorfilters ein entkoppeltes Führungsverhalten in dem Sinne zu erreichen, daß sich eine Änderung des Sollwertes $w_i$ nur auf die Regelgröße $y_i$ und nicht auf die anderen Regelgrößen $y_j (j \neq i)$ auswirkt. Dazu wird das Vorfilter so entworfen, daß die Kopplungen, die im geschlossenen Regelkreis durch das Korrekturnetzwerk verursacht werden, für das Führungsverhalten wieder aufgehoben werden. Der entscheidende Unterschied zu der "echten" Entkopplung innerhalb des Regelkreises, wie sie in Abschnitt 2.4 diskutiert

---

1) In ganz speziellen Fällen mag es möglich sein, ein Korrekturnetzwerk so zu entwerfen, daß $\underline{B}_K(z^{-1})\ [\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})]^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist. Dies läuft dann wieder auf Entkopplung hinaus.

wird, besteht darin, daß nicht unbedingt Integrität erreicht wird. Da die Kopplungen innerhalb des geschlossenen Kreises nicht vollständig aufgehoben werden, hat das Öffnen einer Rückführung, das z. B. durch Meßgliedausfall verursacht werden kann, Einfluß auf alle anderen Rückführungen und kann eventuell sogar zur Instabilität des gesamten Regelungssystems führen.

Die bisher gemachten Aussagen beziehen sich auf den Begriff der dynamischen Entkopplung. Statische Entkopplung wird durch den stationär genauen Regler stets gewährleistet, da der Begriff der stationären Genauigkeit statische Entkopplung einschließt.

Im folgenden soll die Dimensionierung des Vorfilters für (dynamisch) entkoppelndes Führungsverhalten kurz skizziert werden. Im störungsfreien Fall gilt

$$\underline{Y}_E(z) = \underline{Y}_M(z) = \underline{G}_M(z^{-1})\ \underline{G}_V(z^{-1})\ \underline{w}(z), \tag{3.42}$$

wobei

$$\underline{G}_M(z^{-1}) = \underline{A}_M^{-1}(z^{-1}) \cdot z^{-\overline{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}_M(z^{-1}) \tag{3.43}$$

die Übertragungsmatrix des Parallelmodells ist. Das Übertragungsverhalten des Korrekturnetzwerkes kann entsprechend Gl.(3.2) und Gl. (2.43) auch durch die Beziehungen

$$\underline{Y}_K(z) = \underline{G}_K(z^{-1})\ \underline{u}(z) \tag{3.44}$$

mit der Übertragungsmatrix

$$\underline{G}_K(z^{-1}) = \underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})\ \underline{D}_e(z^{-1}) \tag{3.45}$$

beschrieben werden. Mit Gl.(2.2), Gl.(3.44) und Gl.(3.4) folgt aus Gl.(3.42)

$$[\underline{G}(z^{-1}) + \underline{G}_K(z^{-1})]\ \underline{u}(z) = \underline{G}_M(z^{-1})\ \underline{G}_V(z^{-1})\ \underline{w}(z). \tag{3.46}$$

Da

$$\underline{y}(z) = \underline{G}(z^{-1})\ \underline{u}(z) \tag{2.2}$$

mit

$$\underline{G}(z^{-1}) = \underline{A}^{-1}(z^{-1})\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\ \underline{D}_e(z^{-1}) \tag{2.16}$$

ist, ergibt sich nach Gl.(3.46)

$$\underline{y}(z) = \underline{G}(z^{-1})\ [\underline{G}(z^{-1}) + \underline{G}_K(z^{-1})]^{-1}\ \underline{G}_M(z^{-1})\ \underline{G}_V(z^{-1})\ \underline{w}(z) \tag{3.47}$$

für das dynamische Verhalten der Regelgrößen. Das Führungsverhalten ist offensichtlich dann entkoppelt, wenn das Produkt der Übertragungsmatrizen eine Diagonalmatrix ergibt. Dies führt auf den Ansatz

$$\underline{G}(z^{-1})\ [\underline{G}(z^{-1}) + \underline{G}_K(z^{-1})]^{-1}\ \underline{G}_M(z^{-1})\ \underline{G}_V(z^{-1}) = \underline{G}_D(z^{-1}), \tag{3.48}$$

wobei $\underline{G}_D(z^{-1})$ eine stabile diagonale Übertragungsmatrix ist, die so gewählt werden muß, daß das Vorfilter realisierbar ist. Damit erhält man für das Vorfilter

$$\underline{G}_V(z^{-1}) = \underline{G}_M^{-1}(z^{-1})\ [\underline{I} + \underline{G}_K(z^{-1})\ \underline{G}^{-1}(z^{-1})]\ \underline{G}_D(z^{-1}). \tag{3.49}$$

Da das Vorfilter stabil sein muß, ist entsprechend Gl.(3.49) entkoppelndes Führungsverhalten nur möglich, falls

1. das Parallelmodell so gewählt wird, daß seine inverse Übertragungsmatrix stabil ist und

2. die Inverse der Übertragungsmatrix der Regelstrecke stabil ist.

Die erste Forderung läßt sich immer erfüllen, am einfachsten durch die Wahl $\underline{B}_M(z^{-1}) = \underline{I}$. Die zweite Forderung setzt voraus, daß die Regelstrecke selbst entkoppelbar sein muß, da sonst die Inverse der Übertragungsmatrix gar nicht existiert. Nach Gl.(2.16) gilt

$$\underline{G}^{-1}(z^{-1}) = \underline{D}_e^{-1}(z^{-1})\ \underline{B}^{-1}(z^{-1})\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{A}(z^{-1}). \qquad (3.50)$$

Die Pole dieser Matrix sind dementsprechend die Wurzeln der Gleichung

$$\prod_{i=1}^{q} z^{d_i^e} \cdot \det \underline{B}(z^{-1}) \cdot \prod_{i=1}^{q} z^{d_i^a} = 0\,. \qquad (3.51)$$

Aus Gl.(3.51) folgt, daß die Stabilitätsforderung für $\underline{G}^{-1}(z^{-1})$ mit Voraussetzung V2.3, Gl.(2.36) (vgl. Abschnitt 2.2), identisch ist. Für Regelstrecken, die diese Voraussetzung erfüllen, ist aber ein Korrekturnetzwerk aus Stabilitätsgründen nicht erforderlich. Mit anderen Worten: Entkoppelndes Führungsverhalten des Reglers mit Korrekturnetzwerk kann nur für jene Klasse von Regelstrecken erreicht werden, die auch mit dem entkoppelnden Kompensationsregler ohne Korrekturnetzwerk nach Abschnitt 2.7 stabilisiert werden können. (An dieser Stelle sei noch einmal erwähnt, daß für den Regler mit Korrekturnetzwerk die Regelstrecke weder entkoppelbar noch ihre Übertragungsmatrix eine stabile Inverse haben muß, wenn auf entkoppelndes Führungsverhalten verzichtet wird; lediglich Gl.(3.6) und Gl.(3.7) müssen durch die Wahl des Korrekturnetzwerks erfüllt werden.)

Besitzt die Regelstrecke eine instabile inverse Übertragungsmatrix, so kann Gl.(3.49) noch dazu benutzt werden, um zumindest näherungsweise entkoppelndes Führungsverhalten zu erzielen. Dies kann z. B. dadurch geschehen, daß man versucht, im Frequenzbereich die instabilen Anteile von $\underline{G}^{-1}(z^{-1})$ durch betragsmäßig gleiche oder annähernd gleiche stabile Übertragungsfunktionen zu ersetzen.

Da das Korrekturnetzwerk den Nachteil hat, eine entkoppelnde Regelung mit vollständiger Integrität zu verhindern, bleibt die Frage, ob es in jedem Fall sinvoll ist, bei Regelstrecken, die Voraussetzung V2.3, Gl.(2.36) erfüllen, von vornherein auf das Korrekturnetzwerk zu verzichten. Diese Frage ist zu verneinen. Mit dem Korrekturnetzwerk kann nämlich das Stellverhalten entscheidend beeinflußt werden. Nach Gl.(3.5a) gilt für das dynamische Verhalten der Hilfsgrößen $\underline{u}_d$ im störungsfreien Fall

$$\underline{u}_d(z^{-1}) = \underline{B}_E^{-1}(z^{-1})\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{A}_E(z^{-1})\ \underline{Y}_E(z)$$

$$= \frac{\text{adj}\ [\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})]}{\det\ [\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})]}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\underline{A}_E(z^{-1})\underline{Y}_E($$

(3.52)

Das dynamische Verhalten des Signalvektors $\underline{u}_d$ und damit auch der Stellgrößen $\underline{u}$ hängt somit entscheidend von den Wurzeln der Determinante im Nenner, d. h. von Gl.(3.7) ab. Diese Wurzeln können nur durch das Korrekturnetzwerk, nicht aber durch das Parallelmodell verschoben werden. Im Fall ohne Korrekturnetzwerk ($\underline{B}_K(z^{-1}) = \underline{O}$, $\underline{A}_K(z^{-1}) = \underline{I}$) erfüllen sie die Gleichung

$$\det \underline{B}(z^{-1}) = 0\,. \tag{3.53}$$

Liegt nun z. B. eine der Wurzeln in der linken Halbebene des Einheitskreises, so ergibt sich ein stark oszillierendes Verhalten der Stellgröße, dies bedeutet einen hohen Stellaufwand (Hahn (1978), Hahn (1981), Nöth (1982)). Das Korrekturnetzwerk bietet die Möglichkeit, die Wurzeln des Nennerpolynoms von Gl.(3.52), d. h. die Wurzeln von Gl.(3.7), beliebig festzulegen und damit auch das Stellverhalten in weiten Grenzen einzustellen.

## 3.4. Exkurs über "nichtminimalphasige" Mehrgrößensysteme

Diskrete nichtminimalphasige Eingrößensysteme sind dadurch gekennzeichnet, daß mindestens eine der Nullstellen ihrer Übertragungsfunktion außerhalb des Einheitskreises der z-Ebene liegt.[1] Dies bedeutet, daß die inverse Übertragungsfunktion instabil ist. In direkter Analogie läßt sich die Nichtminimalphasigkeit eines Mehrgrößensystems definieren: Ein entkoppelbares Mehrgrößensystem mit

---

[1] Alle in diesem Abschnitt gemachten Aussagen gelten auch für kontinuierliche Systeme, wenn man im Bildbereich die Variable $z^{-1}$ durch die Variable s und den Begriff "außerhalb des Einheitskreises" durch "in der rechten s-Halbebene" ersetzt.

gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen heißt dann nichtminimalphasig, wenn seine Übertragungsmatrix eine instabile Inverse besitzt. Problematisch ist, daß diese Definition nicht jene Klasse von Mehrgrößensystemen erfaßt, die nicht entkoppelbar sind, zu denen also gar kein inverses System existiert. Auch beschränkt sich diese Definition auf quadratische Übertragungsmatrizen.

Eine allgemeinere Definition der Nichtminimalphasigkeit erhält man über die Übertragungsnullstellen des Mehrgrößensystems. Diese Nullstellen werden mit Hilfe der Smith-MacMillan-Form der Übertragungsmatrix definiert (MacFarlane und Karcanias (1976), Postlethwaite und MacFarlane (1979), Rosenbrock (1970) und (1973), Roppenecker und Preuß (1982), Patel und Munro (1982)). Jede qxp-Matrix $\underline{G}(z^{-1})$ mit dem normalen Rang [1)]

$$r \leq \min(q,p) \tag{3.54}$$

kann in die Smith-MacMillan-Form

$$\underline{G}(z^{-1}) = \underline{L}(z^{-1})\ \underline{M}(z^{-1})\ \underline{J}(z^{-1}) \tag{3.55}$$

faktorisiert werden. Die qxq Matrix $\underline{L}(z^{-1})$ und die pxp Matrix $\underline{J}(z^{-1})$ sind unimodulare Polynommatrizen. Die qxp MacMillan-Matrix $\underline{M}(z^{-1})$ hat die verallgemeinerte Diagonalform

$$\underline{M}(z^{-1}) = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{\gamma_1(z^{-1})}{\delta_1(z^{-1})} & & 0 & \\ & \ddots & & \underline{0}_{rx(p-r)} \\ 0 & & \frac{\gamma_r(z^{-1})}{\delta_r(z^{-1})} & \\ \hline & \underline{0}_{(q-r)\ xp} & & \end{array}\right] . \tag{3.56}$$

---

1) Unter dem normalen Rang einer Matrix $\underline{G}(z^{-1})$ wird die Dimension der größten quadratischen Untermatrix verstanden, deren Determinante nicht für alle $z^{-1}$ identisch verschwindet.

Die Polynome $\gamma_i(z^{-1})$ und $\delta_i(z^{-1})$ erfüllen folgende Teilbarkeitsbedingungen (Rosenbrock 1970)):

- $\gamma_i(z^{-1})$ und $\delta_i(z^{-1})$ sind teilerfremd.
- Jedes $\delta_i(z^{-1})$ teilt alle vorangehenden $\delta_j(z^{-1})$ mit $j < i$ ohne Rest.
- Jedes $\gamma_i(z^{-1})$ teilt alle nachfolgenden $\gamma_j(z^{-1})$ mit $j > i$ ohne Rest.

Die Übertragungsnullstellen des Systems $\underline{G}(z^{-1})$ sind definiert als die Menge aller Wurzeln der Zählerpolynome $\gamma_i(z^{-1})$ der Matrix $\underline{M}(z^{-1})$ für $i = 1, \ldots, r$. Haben zwei Polynome $\gamma_i(z^{-1})$ und $\gamma_j(z^{-1})$ dieselbe Wurzel, so wird diese als doppelte Nullstelle gezählt.

Die Pole der Übertragungsmatrix werden aus der Menge der Wurzeln der Nennerpolynome $\delta_i(z^{-1})$ für $i = 1, \ldots, r$ gebildet. Diese Wurzeln sind bei vollständig steuer- und beobachtbaren Mehrgrößensystemen identisch mit den Eigenwerten der mit einer Zustandsraumdarstellung verbundenen Systemmatrix, bei nicht vollständig steuer- und beobachtbaren Systemen bilden sie eine Untermenge dieser Eigenwerte (Hahn, 1981).

Die Nichtminimalphasigkeit eines Mehrgrößensystems kann nun folgendermaßen definiert werden: Ein diskretes Mehrgrößensystem heißt nichtminimalphasig, wenn (mindestens) eine Übertragungsnullstelle seiner Übertragungsmatrix außerhalb oder auf dem Rand des Einheitskreises der z-Ebene liegt; d. h. wenn ein $z_o$ mit $|z_o| \geq 1$ existiert, so daß

$$\gamma_i(z_o^{-1}) = 0 \text{ für ein } i \text{ mit } 1 \leq i \leq r . \qquad (3.57)$$

Die hier getroffene Definition ist für den Spezialfall eines entkoppelbaren Mehrgrößensystems mit gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen mit der vorher gemachten Definition über die Instabilität des inversen Systems offensichtlich dann konsistent, wenn die Pole des inversen Systems mit den Wurzeln der Zählerpolynome $\gamma_i(z^{-1})$ der Smith-MacMillan-Form, d. h. den Übertragungsnullstellen, des Origi-

nalsystems übereinstimmen. Daß dies tatsächlich der Fall ist, ist bereits von Postlethwaite (1977) gezeigt worden. Es ist interessant, daß Patel (1973) die "Nullstellen eines Mehrgrößensystems" als die Pole des inversen Systems *definiert*. Er beschränkt den Begriff des inversen Systems jedoch nicht auf quadratische Übertragungsmatrizen. Für jedes Mehrgrößensystem mit vollem normalen Rang

$$r = \min(q,p)$$

kann ein inverses System definiert werden, das jedoch für $p \neq q$ nicht mehr eindeutig ist (Patel (1973), Patel und Munro (1982)). Für den Spezialfall

$$r = q = p$$

existiert zu jedem System $\underline{G}(z^{-1})$ genau ein inverses System, das durch die Übertragungsmatrix $\underline{G}^{-1}(z^{-1})$ beschrieben wird.

Im Abschnitt 3.3.4 wird gezeigt, daß alle Systeme, die eine stabile Inverse besitzen, Voraussetzung V2.3 aus Abschnitt 2.2 erfüllen. Entsprechend den in diesem Abschnitt gemachten Aussagen bedeutet eine stabile Inverse, daß alle Übertragungsnullstellen des ursprünglichen Systems im Inneren des Einheitskreises liegen. Solche Systeme heißen minimalphasig. Diese Definition ergibt sich direkt als Negation der Definition für die Nichtminimalphasigkeit. Voraussetzung V2.3 wird demnach genau von nichtminimalphasigen Regelstrecken verletzt.

Während bei Eingrößensystemen der Begriff der Nichtminimalphasigkeit mit Hilfe des Frequenzganges noch eine physikalisch anschauliche Interpretation zuläßt, bekommt für Mehrgrößensysteme dieser Begriff - ähnlich den Begriffen der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit - eine eher mathematisch abstrakte Note. Dennoch ist er sehr nützlich, weil alle wichtigen Eigenschaften nichtminimalphasiger Eingrößensysteme sich direkt auf nichtminimalphasige Mehrgrößensysteme übertragen lassen. Im Zusammenhang mit dieser Arbeit ist die Anwendung von Kompensationsreglern von Interesse. Solche Regler können bekanntlich nicht

ohne bestimmte Modifikationen auf nichtminimalphasige Regelstrecken mit einem Ein- und Ausgang angewandt werden, da sonst der geschlossene Regelkreis instabil ist (Nöth (1982), Unbehauen (1983)). Auch nichtminimalphasige Mehrgrößensysteme können aus demselben Grund nicht mit beliebigen Kompensationsreglern geregelt werden (vgl. Abschnitt 2.4; Hahn (1981)). Dennoch hat sich der Begriff "nichtminimalphasiges Mehrgrößensystem" noch nicht allgemein durchgesetzt, weshalb er auch im folgenden in dieser Arbeit nicht weiter verwandt wird.

## 3.5. Entwurf des Korrekturnetzwerkes

### 3.5.1. Entwurf im Frequenzbereich

#### 3.5.1.1. Der Eingrößenfall

Das wesentliche Motiv für die Einführung des Korrekturnetzwerkes liegt in der Stabilisierung des Kompensationsalgorithmus' nach Abschnitt 2.2.4 für jene Regelstrecken, die die Voraussetzungen V2.2 und V2.3 nicht erfüllen. Auf dieses Motiv konzentriert sich der Entwurf des Korrekturnetzwerkes im Frequenzbereich. Zunächst soll der grundsätzliche Entwurfsgedanke an Hand von Regelstrecken mit einem Eingang und einem Ausgang verdeutlicht werden (Hahn und Unbehauen (1982)).

Gegeben sei die Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}\, z^{-d}. \tag{3.58}$$

Dieser Regelstrecke wird das Korrekturnetzwerk

$$G_K(z^{-1}) = \frac{B_K(z^{-1})}{A_K(z^{-1})}\, z^{-d} \tag{3.59}$$

parallel geschaltet. Das Korrekturnetzwerk ist nach Gl.(3.7) so zu wählen, daß die Stabilitätsbedingung

$$A_K(z^{-1})\ B(z^{-1}) + A(z^{-1})\ B_K(z^{-1}) \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1 \qquad (3.60)$$

erfüllt ist. Gl.(3.60) ist äquivalent mit der Forderung

$$H(z^{-1}) = 1 + \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})}\,\frac{B_K(z^{-1})}{A_K(z^{-1})} \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1, \qquad (3.61)$$

falls die Polynomprodukte $A(z^{-1})\ B_K(z^{-1})$ und $B(z^{-1})\ A_K(z^{-1})$ keine gemeinsamen Teiler mit Wurzeln außerhalb des Einheitskreises der z-Ebene haben. Bei vorausgesetzter Teilerfremdheit von $B(z^{-1})$ und $A(z^{-1})$ sind die mit Gl.(3.60) und Gl.(3.61) verbundenen Bedingungen also identisch, falls die Polynome $B_K(z^{-1})$ und $A_K(z^{-1})$ so gewählt werden, daß sie untereinander teilerfremd sind und keine Wurzel $z_o$ von $B(z^{-1})$ bzw. $A(z^{-1})$ mit $|z_o| \geq 1$ enthalten.

Gl.(3.61) kann als die Stabilitätsbedingung für das rückgekoppelte System nach Bild 3.4 aufgefaßt werden. Der Vorwärtszweig dieses

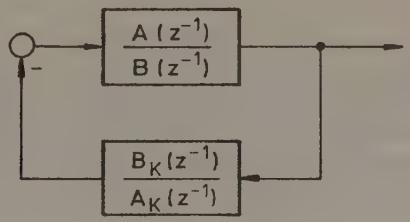



Bild 3.4. Rückgekoppeltes System mit der charakteristischen Gleichung $H(z^{-1})$ nach Gl.(3.61)

Systems wird von der inversen Übertragungsfunktion der Regelstrecke, der Rückwärtszweig von der Übertragungsfunktion des Korrekturnetzwerkes ohne Berücksichtigung der Schrittverzögerung d gebildet. Damit ist aber der Entwurf des Korrekturnetzwerkes für die Regelstrecke nach Gl.(3.58) in eine "klassische" Stabilisierungsaufgabe umformuliert worden, die lautet: Finde für ein gegebenes System $A(z^{-1})/B(z^{-1})$ eine negative Rückführung mit der Übertragungsfunktion $B_K(z^{-1})/A_K(z^{-1})$, so daß der geschlossene Kreis (asymptotisch) stabil ist. Eine solche Aufgabe ist die Grundaufgabe der Regelungstechnik überhaupt.

Da der Entwurf des Korrekturnetzwerkes nun in eine Stabilisierungsaufgabe umformuliert ist, können zu seinem Entwurf alle bekannten Methoden der Regelungstechnik herangezogen werden, die diese Aufgabe lösen. So ist es z. B. möglich, das Korrekturnetzwerk mit Hilfe des Frequenzkennlinienverfahrens zu entwerfen. In dieser Arbeit wird hingegen die Methode der Wurzelortskurven bevorzugt. Dazu werden in der z-Ebene die Wurzeln der gegebenen Streckenpolynome $A(z^{-1})$ als Nullstellen und $B(z^{-1})$ als Polstellen eingetragen. Die Wurzeln der Polynome $B_K(z^{-1})$ und $A_K(z^{-1})$ werden so bestimmt, daß alle Äste der in Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors des Korrekturnetzwerkes gezeichneten Wurzelortskurve von $H(z^{-1})$ nach Gl.(3.61) für ein bestimmtes Interval dieses Verstärkungsfaktors durch den Einheitskreis laufen. Anschließend wird aus diesem Intervall ein geeigneter Verstärkungsfaktor des Korrekturnetzwerkes gewählt. In manchen Fällen ist es günstiger, zunächst die w-Transformation mit

$$w = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} ,$$

die das Innere des Einheitskreises der z-Ebene in die linke offene w-Halbebene abbildet, anzuwenden. Der Entwurf in der w-Ebene ist dann mathematisch formal mit einem Stabilitätsentwurf für kontinuierliche Systeme identisch (Voß (1977)).

Shaked und MacFarlane (1977) haben nachgewiesen, daß jedes beliebige lineare und zeitinvariante System, das durch eine rationale Übertragungsfunktion beschrieben werden kann, durch eine Rückführung stabilisierbar ist. Da sie kontinuierliche Übertragungsfunktionen betrachten, benutzen sie zum Beweis ein algebraisches Stabilitätskriterium, mit dem die Anzahl der Pole des geschlossenen Kreises in der linken offenen s-Halbebene abgeschätzt wird. Ihr Beweis läßt sich jedoch mit der w-Transformation direkt auf diskrete Systeme übertragen. Entsprechend der Aussage von Shaked und MacFarlane existiert also zu jeder Regelstrecke ein Netzwerk, so daß die Parallelschaltung aus Regelstrecke und eben diesem Netzwerk minimalphasig ist. Damit dieses Netzwerk aber als Korrekturnetzwerk für das Regelungskonzept verwendet werden kann, muß es zusätzlich (asymptotisch) stabil sein, da seine Pole als Wurzeln der charakteristischen Gleichung des ge-

schlossenen Kreises auftauchen (vgl. Abschnitt 3.3.2, Gl.(3.27a)). Die Frage, die sich hier stellt, lautet also: Ist es möglich, für jede beliebige Regelstrecke ein *stabiles* Korrekturnetzwerk zu finden, so daß die Parallelschaltung, also die erweiterte Regelstrecke, minimalphasig ist? Diese Frage kann mit einem Gegenbeispiel verneint werden. Betrachtet wird hierzu die Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$G(z^{-1}) = \frac{1 - \beta\, z^{-1}}{(1 - \alpha_1\, z^{-1})(1 - \alpha_2\, z^{-1})}\, z^{-1} \tag{3.62a}$$

mit $1 < \alpha_1 < \beta < \alpha_2$. (3.62b)

In Bild 3.5 sind die Null- und Polstellen der inversen Regelstrecke, die für die Wurzelortskurven von $H(z^{-1})$ nach Gl.(3.61) benötigt werden, in der z-Ebene eingetragen. Da von dem Pol bei $z = \beta$ der inversen Regelstrecke ein Ast der Wurzelortskurven von $H(z^{-1})$ nach Gl. (3.61) ausgehen muß und dieser entweder an der Nullstelle $z = \alpha_1$ oder $z = \alpha_2$ der inversen Regelstrecke oder an einer Nullstelle des Korrekturnetzwerkes, die zwischen $\alpha_1$ und $\beta$ bzw. $\beta$ und $\alpha_2$ plaziert werden könnte, endet, liegt ein Ast der Wurzelortskurven für alle stabilen Korrekturnetzwerke vollständig außerhalb des Einheitskreises auf einem der in Bild 3.5 mit a bzw. b bezeichneten Abschnitte der positiv reellen Achse. Die Bedingung nach Gl.(3.61) ist für die Regelstrecke nach Gl.(3.62a,b) mit einem stabilen Korrekturnetzwerk also nicht zu erfüllen. Eine minimalphasige erweiterte Regelstrecke existiert unter den gegebenen Bedingungen nicht.

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß es auch bei theoretisch exakter Kenntnis der Nullstelle $\beta$ der Regelstrecke nicht möglich ist, den Einfluß dieser Nullstelle, die als Pol der inversen Strecke in Bild 3.5 auftaucht, durch eine Nullstelle des Korrekturnetzwerkes bei $z = \beta$ zu kompensieren. Denn die Stabilitätsbedingung Gl.(3.60) ist mit Gl.(3.61) nur dann identisch, wenn die Polynomprodukte $A(z^{-1})\, B_K(z^{-1})$ und $A_K(z^{-1})\, B(z^{-1})$ keinen gemeinsamen Teiler mit Wurzeln außerhalb des Einheitskreises der z-Ebene haben. Wählt man ein Korrekturnetzwerk mit

$$B_K(z^{-1}) = (1 - \beta\, z^{-1})\, \tilde{B}_K(z^{-1}),$$

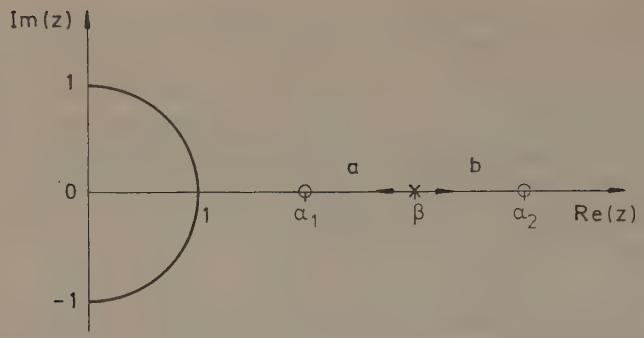



Bild 3.5. Null(O)- und Polstellen(x)-Verteilung der inversen Regelstrecke nach Gl.(3.62a,b)

so ist $1 - \beta z^{-1}$ aber ein solcher Teiler. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß in diesem Fall $\beta$ tatsächlich eine Wurzel des Polynoms der linken Seite von Gl.(3.60) ist.

Ist die Regelstrecke asymptotisch stabil, so läßt sich immer ein stabiles Korrekturnetzwerk finden, so daß die erweiterte Regelstrekke minimalphasig, d. h. Gl.(3.60) erfüllt ist. In diesem Fall kann z. B.

$$A_K(z^{-1}) = A(z^{-1}) \tag{3.63}$$

und

$$B_K(z^{-1}) = P_H(z^{-1}) - B(z^{-1}) \tag{3.64}$$

gewählt werden, wobei $P_H(z^{-1})$ ein beliebiges Hurwitzpolynom ist. Die Nullstellen der erweiterten Regelstrecke sind dann durch die Polstellen der Regelstrecke und die Wurzeln des Polynoms $P_H(z^{-1})$ gegeben. Nun kann aber jedes beliebige instabile System entsprechend den Aussagen von Shaked und MacFarlane (1977) durch eine Rückführung der Ausgangsgröße stabilisiert werden. Dies führt auf die Idee, eine instabile Regelstrecke zunächst durch eine Rückführung der Regelgröße zu stabilisieren und dann für das stabile rückgekoppelte System ein Korrekturnetzwerk zu entwerfen. Man erhält dann für die erweiterte Regelstrecke die Struktur nach Bild 3.6. Die Implemen-

tierung ist in Bild 3.7 dargestellt. Der gesamte Regler besteht aus Korrekturnetzwerk, der zusätzlichen Rückführung und dem Kompensator, der jetzt natürlich für die erweiterte Regelstrecke nach Bild 3.6 entworfen werden muß. Diese Struktur läßt sich auf beliebige Regelstrecken anwenden. Allerdings bleibt die Frage, ob für Regelstrecken,

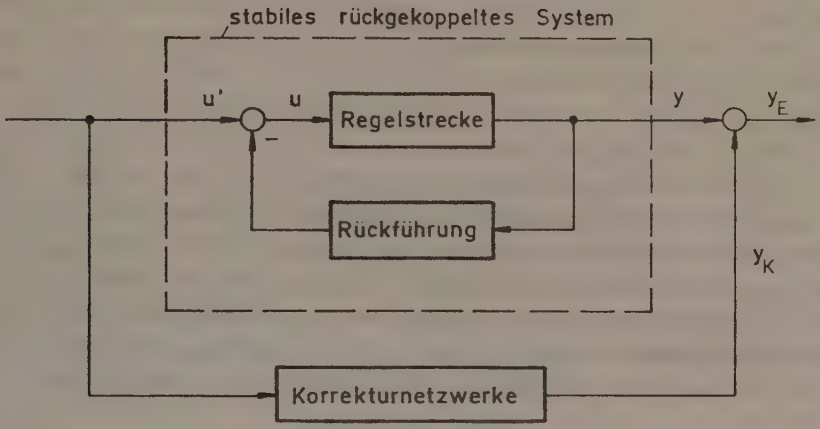



Bild 3.6. Struktur der erweiterten Regelstrecke mit zusätzlicher Rückführung der Regelgröße

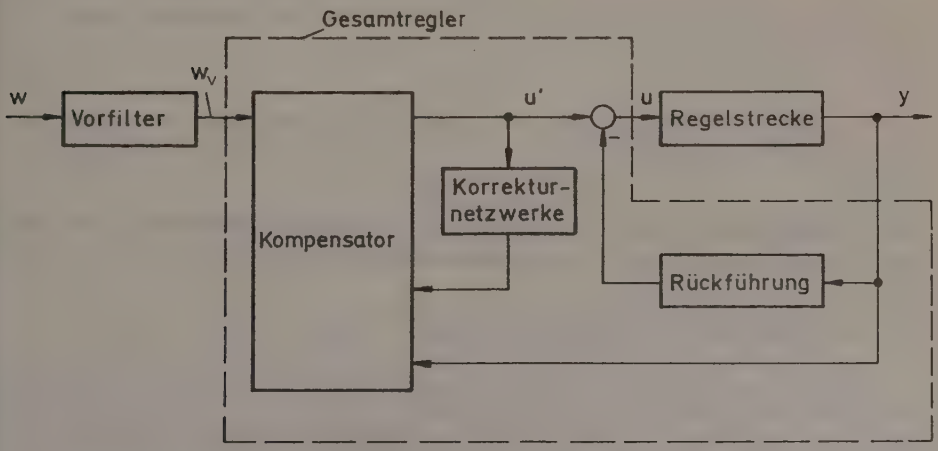



Bild 3.7. Implementierung des Gesamtreglers mit der erweiterten Regelstrecke nach Bild 3.6

die eine zusätzliche Rückführung der Regelgröße aus Stabilitätsgründen erforderlich machen (wie das Beispiel nach Gl.(3.62a,b)), die Grundkonzeption der hier beschriebenen Regelung noch sinnvoll ist, oder ob nicht von vornherein ein anderes Regelungskonzept gewählt werden sollte. Auf diese Frage wird noch im Zusammenhang mit der adaptiven Realisierung des Reglers eingegangen werden.

Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.3.3 muß für stationäre Genauigkeit das Korrekturnetzwerk eine $(n_z+1)$-fache Nullstelle bei $z = 1$ haben. Für die Wurzelortskurven von $H(z^{-1})$ nach Gl.(3.61) enden dann $n_z+1$ Äste in diesem Punkt unter den Winkeln $k \cdot 360^\circ/(n_z+1)$ oder $(k+0.5) \cdot 360^\circ/(n_z+1)$ $(k = 0,\ldots,n_z)$. Für $n_z > 0$ liegen somit immer ein oder mehrere Äste der Wurzelortskurven für große Verstärkungsfaktoren des Korrekturnetzwerkes außerhalb des Einheitskreises. Dies bedeutet, daß der Regelkreis nach Abschnitt 3.2 für großes $n_z$ schwieriger zu stabilisieren ist. In der Praxis sollte man daher $n_z$ so gering wie möglich wählen. Um sprungförmige Sollwertänderungen und Störungen auszuregeln, genügt es, $n_z = 0$ zu setzen. Dies läuft auf die Einführung eines einfachen I-Verhaltens des Reglers hinaus (Bild 3.3).

### 3.5.1.2. Der Mehrgrößenfall

Im Mehrgrößenfall ist die direkte Auswertung der Stabilitätsbedingung

$$\det(\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})) \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1 \qquad (3.7)$$

sehr kompliziert. Dies soll am Beispiel eines Zweigrößensystems verdeutlicht werden. Gl.(3.7) geht dann in die Beziehung

$$A_{K1}(z^{-1})\ B_{11}(z^{-1})\ A_{K2}(z^{-1})\ B_{22}(z^{-1}) +$$

$$A_{K1}(z^{-1})\ B_{11}(z^{-1})\ A_2(z^{-1})\ B_{K22}(z^{-1}) +$$

$$A_1(z^{-1})\ B_{K11}(z^{-1})\ A_{K2}(z^{-1})\ B_{22}(z^{-1}) +$$

$$A_1(z^{-1})\ B_{K11}(z^{-1})\ A_2(z^{-1})\ B_{K22}(z^{-1}) -$$

$$A_{K1}(z^{-1})\ B_{12}(z^{-1})\ A_{K2}(z^{-1})\ B_{21}(z^{-1}) -$$

$$A_{K1}(z^{-1})\ B_{12}(z^{-1})\ A_2(z^{-1})\ B_{K21}(z^{-1}) -$$

$$A_1(z^{-1})\ B_{K12}(z^{-1})\ A_{K2}(z^{-1})\ B_{21}(z^{-1}) -$$

$$A_1(z^{-1})\ B_{K12}(z^{-1})\ A_2(z^{-1})\ B_{K21}(z^{-1}) \neq 0$$

$$\text{für alle } |z| \geq 1 \tag{3.65}$$

über. Selbst wenn die Nebendiagonalelemente $B_{K12}(z^{-1})$ und $B_{K21}(z^{-1})$ des Korrekturnetzwerkes identisch Null gesetzt werden, ist die Auswertung der übrig bleibenden Terme sehr schwierig, da jeder Summand ein Produkt von Polynomen des Korrekturnetzwerkes enthält. Deshalb ist es nicht sinnvoll, Gl.(3.7) direkt auszuwerten. Im folgenden wird ein indirekter Weg für die Auswertung der Stabilitätsbedingung vorgeschlagen.

Mit $\underline{G}_d(z^{-1})$ wird die qxq Übertragungsmatrix bezeichnet, die das dynamische Verhalten der Regelgrößen $\underline{y}(z)$ in Abhängigkeit der Hilfsgrössen $\underline{u}_d(z)$ beschreibt, d. h.

$$\underline{y}(z) = \underline{G}_d(z^{-1})\ \underline{u}_d(z). \tag{3.66}$$

Mit Gl.(2.45) und Gl.(2.16) folgt

$$\underline{G}_d(z^{-1}) = z^{-\bar{d}_e}\ \underline{A}^{-1}(z^{-1})\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}). \tag{3.67}$$

Spaltet man nun noch die Totzeitterme ab, so ergibt sich

$$\underline{G}_d(z^{-1}) = z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \bar{\underline{G}}_d(z^{-1}) \tag{3.68a}$$

mit

$$\bar{\underline{G}}_d(z^{-1}) = \underline{A}^{-1}(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}). \tag{3.68b}$$

Die Matrix $\bar{\underline{G}}_d(z^{-1})$ enthält die Übertragungsfunktionen

$$\bar{G}_{dij}(z^{-1}) = \frac{\bar{B}_{ij}(z^{-1})}{\bar{A}_{ij}(z^{-1})}; \quad i,j = 1, \ldots, q, \tag{3.69}$$

wobei für $\bar{B}_{ij}(z^{-1})$ und $\bar{A}_{ij}(z^{-1})$ eine teilerfremde Darstellung gewählt wird. Bei vorausgesetzter Teilerfremdheit der Polynome $\tilde{B}_{ij}(z^{-1})$ und $\tilde{A}_{ij}(z^{-1})$ aus Gl.(2.1) gelten dann die Beziehungen

$$\bar{B}_{ij}(z^{-1}) = \tilde{B}_{ij}(z^{-1})\, z^{-(d_{ij}-d_i^a-d_j^e)}; \quad i,j = 1, \ldots, q$$

und

$$\bar{A}_{ij}(z^{-1}) = \tilde{A}_{ij}(z^{-1}); \quad i = 1, \ldots, q\,.$$

Nach Gl.(3.68b) gilt

$$\det \bar{\underline{G}}_d(z^{-1}) = \frac{\det \underline{B}(z^{-1})}{\det \underline{A}(z^{-1})}\,. \tag{3.70}$$

Die Polynome $\det \underline{A}(z^{-1})$ und $\det \underline{B}(z^{-1})$ können ein gemeinsames Teilerpolynom $\rho(z^{-1})$ haben, so daß im allgemeinen

$$\det \underline{B}(z^{-1}) = \rho(z^{-1})\, B_D(z^{-1}) \tag{3.71a}$$

$$\det \underline{A}(z^{-1}) = \rho(z^{-1})\, A_D(z^{-1}) \tag{3.71b}$$

ist. Die Polynome $B_D(z^{-1})$ und $A_D(z^{-1})$ sind teilerfremd. Damit folgt aus Gl.(3.70)

$$\det \bar{\underline{G}}_d(z^{-1}) = \frac{B_D(z^{-1})}{A_D(z^{-1})}\,. \tag{3.72}$$

Angenommen, das Polynom $\rho(z^{-1})$ besitzt nur Wurzeln im Einheitskreis der z-Ebene, d. h.

$$\rho(z^{-1}) \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1\,. \tag{3.73}$$

Dann gilt nach Gl.(3.71a) und (3.72):

Jede Wurzel von $\det \underline{B}(z^{-1})$, die außerhalb des Einheitskreises liegt, ist auch Wurzel des Polynoms $B_D(z^{-1})$ und somit Wurzel von $\det \bar{\underline{G}}_d(z^{-1})$, d. h.

$$\det \underline{B}(z_o) = 0 \Longleftrightarrow \det \bar{\underline{G}}_d(z_o) = 0 \text{ für ein } z_o \text{ mit } |z_o| \geq 1. \tag{3.74}$$

Dies bedeutet, daß man unter der Annahme nach Gl.(3.73) in Voraussetzung V2.3, Gl.(2.36), die Matrix $\underline{B}(z^{-1})$ durch $\bar{\underline{G}}_d(z^{-1})$ ersetzen kann.

Von der Übertragungsmatrix des Korrekturnetzwerkes werden jetzt in analoger Weise die Totzeitterme abgespalten, und man erhält entsprechend Gl.(3.2)

$$\underline{Y}_K(z^{-1}) = z^{-\bar{d}_e}\, \underline{D}_a(z^{-1})\, \bar{\underline{G}}_{Kd}(z^{-1})\, \underline{u}_d(z) \tag{3.75a}$$

mit

$$\bar{\underline{G}}_{Kd}(z^{-1}) = \underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\, \underline{B}_K(z^{-1}). \tag{3.75b}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
&\det[\underline{A}_K(z^{-1})\, \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\, \underline{B}_K(z^{-1})] \\
&= \det[\underline{A}_K(z^{-1})\, \underline{A}(z^{-1})(\underline{A}^{-1}(z^{-1})\, \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\, \underline{B}_K(z^{-1}))] \\
&= \det[\underline{A}_K(z^{-1})\, \underline{A}(z^{-1})] \cdot \det[\bar{\underline{G}}_d(z^{-1}) + \bar{\underline{G}}_{Kd}(z^{-1})]
\end{aligned}$$

bzw.

$$\det[\bar{\underline{G}}_d(z^{-1}) + \bar{\underline{G}}_{Kd}(z^{-1})] = \frac{\det[\underline{A}_K(z^{-1})\, \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\, \underline{B}_K(z^{-1})]}{\det \underline{A}_K(z^{-1})\, \det \underline{A}(z^{-1})}\,. \tag{3.76}$$

Da das Korrekturnetzwerk stabil sein muß (vgl. Abschnitt 3.3.2), ist det $\underline{A}_K(z^{-1})$ ein Hurwitzpolynom. Damit folgt aus Gl.(3.76)

Aussage 3.1: Die Stabilitätsbedingung nach Gl.(3.7) ist erfüllt, falls

$$\det[\bar{\underline{G}}_d(z^{-1}) + \bar{\underline{G}}_{Kd}(z^{-1})] \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1 \tag{3.77}$$

ist, die Polynome det $\underline{A}(z^{-1})$ und det $[\underline{A}_K(z^{-1})\, \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1}) \cdot \underline{B}_K(z^{-1})]$ keinen gemeinsamen Teiler mit Wurzeln außerhalb des Einheitskreises der z-Ebene haben und Gl.(3.3b) gilt.

Auf dieser Aussage baut der Entwurf des Korrekturnetzwerkes auf.

Gl.(3.77) ist allerdings auch nicht einfacher auszuwerten als die

die Matrix $\underline{\bar{G}}_d(z^{-1})$, die die Einzelübertragungsfunktionen der Regelstrecke in teilerfremder Darstellung ohne Berücksichtigung der reinen Schrittverzögerungen (Totzeiten) enthält, durch singuläre Spalten- und/oder Zeilenoperationen, d. h. Operationen, gegenüber denen die Determinante invariant ist, auf Dreiecksform $\underline{\bar{G}}_d^{\Delta}(z^{-1})$ zu transformieren:

$$\underline{\bar{G}}_d^{\Delta}(z^{-1}) = \underline{T}_G^{\Delta}(z^{-1})\ \underline{\bar{G}}_d(z^{-1}). \tag{3.78}$$

Die Transformationsmatrix $\underline{T}_G^{\Delta}(z^{-1})$ beschreibt die verwendeten singulären Spalten- und Zeilenoperationen. Daher gilt

$$\det \underline{T}_G^{\Delta}(z^{-1}) = 1 \tag{3.79}$$

und

$$\det \underline{\bar{G}}_d^{\Delta}(z^{-1}) = \det \underline{\bar{G}}_d(z^{-1}). \tag{3.80}$$

Für die Dreiecksmatrix $\underline{\bar{G}}_d^{\Delta}(z^{-1})$ läßt sich die Darstellung

$$\underline{\bar{G}}_d^{\Delta}(z^{-1}) = \{\bar{G}_{dij}^{\Delta}(z^{-1})\} = \left\{ \frac{\bar{B}_{ij}^{\Delta}(z^{-1})}{\bar{A}_{ij}^{\Delta}(z^{-1})} \right\};\ i,j = 1, \ldots, q \tag{3.81}$$

finden, wobei für die untere Dreiecksform

$$\bar{G}_{dij}^{\Delta}(z^{-1}) \equiv 0 \text{ für } j > i$$

bzw. für die obere Dreiecksform

$$\bar{G}_{dij}^{\Delta}(z^{-1}) \equiv 0 \text{ für } j < i$$

ist. Im folgenden wird für die Polynome $\bar{B}_{ij}^{\Delta}(z^{-1})$ und $\bar{A}_{ij}^{\Delta}(z^{-1})$ eine teilerfremde Darstellung vorausgesetzt. Eventuell sich aufgrund der Dreieckstransformation ergebende gemeinsame Teiler werden gekürzt. Da die Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente ist, ergibt sich aus Gl.(3.80) mit Gl.(3.81):

$$\det \underline{\bar{G}}_d(z^{-1}) = \det \underline{\bar{G}}_d^{\Delta}(z^{-1}) = \prod_{i=1}^{q} \frac{\bar{B}_{ii}^{\Delta}(z^{-1})}{\bar{A}_{ii}^{\Delta}(z^{-1})}\ . \tag{3.82}$$

Für das Korrekturnetzwerk $\underline{\bar{G}}_{Kd}(z^{-1})$ kann jetzt auch die Dreiecksform

$$\underline{\bar{G}}^{\Delta}_{Kd}(z^{-1}) = \underline{T}^{\Delta}_{G}(z^{-1})\ \underline{\bar{G}}_{Kd}(z^{-1}) \tag{3.83}$$

mit

$$\underline{\bar{G}}^{\Delta}_{Kd}(z^{-1}) = \{\bar{G}^{\Delta}_{Kdij}\} = \left\{ \frac{\bar{B}^{\Delta}_{Kij}}{A^{\Delta}_{Kij}} \right\};\ i,j = 1, \ldots, q \tag{3.84}$$

angesetzt werden, wobei auch hier für untere Dreiecksform

$$\bar{G}^{\Delta}_{Kdij}(z^{-1}) \equiv 0 \quad \text{für } j > i$$

oder für obere Dreiecksform

$$\bar{G}^{\Delta}_{Kdij}(z^{-1}) \equiv 0 \quad \text{für } j < i$$

ist. Dann folgt mit Gl.(3.79)

$$\det[\underline{\bar{G}}_{d}(z^{-1}) + \underline{\bar{G}}_{Kd}(z^{-1})]$$

$$= \det[\underline{\bar{G}}^{\Delta}_{d}(z^{-1}) + \underline{\bar{G}}_{Kd}(z^{-1})]$$

$$= \prod_{i=1}^{q} \frac{\bar{A}^{\Delta}_{Kii}(z^{-1})\ \bar{B}^{\Delta}_{ii}(z^{-1}) + \bar{A}^{\Delta}_{ii}(z^{-1})\ \bar{B}^{\Delta}_{Kii}(z^{-1})}{\bar{A}^{\Delta}_{ii}(z^{-1})\ \bar{A}^{\Delta}_{Kii}(z^{-1})} \ . \tag{3.85}$$

Aus Gl.(3.85 ergibt sich die

Aussage 3.2: Die Bedingung nach Gl.(3.77) ist erfüllt, falls

$$\bar{A}^{\Delta}_{Kii}(z^{-1})\ \bar{B}^{\Delta}_{ii}(z^{-1}) + \bar{A}^{\Delta}_{ii}(z^{-1})\ \bar{B}^{\Delta}_{Kii}(z^{-1}) \neq 0$$

$$\text{für alle } |z| \geq 1;\ i = 1, \ldots, q \tag{3.86}$$

ist.

Da das Korrekturnetzwerk stabil sein muß, müssen die Polynome $\bar{A}^{\Delta}_{Kii}(z^{-1})$ als Hurwitzpolynome angesetzt werden. Ferner wählt man

die Polynome $A^{\Delta}_{Kii}(z^{-1})$ und $B^{\Delta}_{Kii}(z^{-1})$ sinnvollerweise so, daß sie

1. untereinander teilerfremd sind,

2. $\bar{B}^{\Delta}_{Kii}(z^{-1})$ und $\bar{B}_{ii}(z^{-1})$ teilerfremd sind und

3. $\bar{A}^{\Delta}_{Kii}(z^{-1})$ und $\bar{A}^{\Delta}_{ii}(z^{-1})$ teilerfremd sind.

Dann sind die Wurzeln der Polynome nach Gl.(3.86) identisch mit den Nullstellen der Funktionen

$$H_i(z^{-1}) = 1 + \frac{\bar{A}^{\Delta}_{ii}(z^{-1})}{\bar{B}^{\Delta}_{ii}(z^{-1})} \cdot \frac{\bar{B}^{\Delta}_{Kii}(z^{-1})}{\bar{A}^{\Delta}_{Kii}(z^{-1})}; \quad i = 1, \ldots, q . \tag{3.87}$$

Somit ist Gl.(3.86) unter der vorausgesetzten Teilerfremdheit der Polynome genau dann erfüllt, falls für i = 1 bis q die rückgekoppelten Systeme nach Bild 3.8 (asymptotisch) stabil sind. Damit ist auch

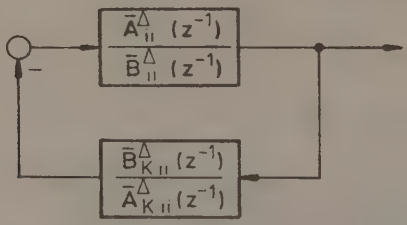



Bild 3.8. Rückgekoppeltes Eingrößensystem mit der charakteristischen Gleichung (3.87)

für ein Mehrgrößensystem mit q Ein- und Ausgängen der Entwurf des Korrekturnetzwerkes auf eine klassische Stabilisierungsaufgabe für q Eingrößensysteme zurückgeführt, die lautet: Finde für die Eingrössensysteme $\bar{A}^{\Delta}_{ii}(z^{-1})/\bar{B}^{\Delta}_{ii}(z^{-1})$ für i = 1 bis q negative Rückführungen mit den Übertragungsfunktionen $\bar{B}^{\Delta}_{Kii}(z^{-1})/\bar{A}^{\Delta}_{Kii}(z^{-1})$ derart, daß die rückgekoppelten Systeme nach Bild 3.8 (asymptotisch) stabil sind.

Nach den Aussagen 3.1 und 3.2 ergeben sich lediglich Bedingungen für die Hauptdiagonalelemente der Dreiecksmatrix $\underline{\bar{G}}^{\Delta}_{Kd}(z^{-1})$ nach

Gl.(3.84). Dies bedeutet, daß für obere Dreiecksform die Elemente $\bar{B}^{\Delta}_{Kij}(z^{-1})/\bar{A}^{\Delta}_{Kij}(z^{-1})$ für $j > i$ bzw. für untere Dreiecksform die Elemente $\bar{B}^{\Delta}_{Kij}(z^{-1})/\bar{A}^{\Delta}_{Kij}(z^{-1})$ für $j < i$ als beliebige stabile Übertragungsfunktionen gewählt werden dürfen, ohne daß sie auf die Stabilitätsbedingung Gl.(3.7) Einfluß haben. [1] Das endgültige Korrekturnetzwerk ergibt sich nach Gl.(3.83) durch die Rücktransformation

$$\bar{\underline{G}}_{Kd}(z^{-1}) = [\underline{T}^{\Delta}_{G}(z^{-1})]^{-1}\, \bar{\underline{G}}^{\Delta}_{Kd}(z^{-1})$$

$$= \{\frac{\bar{B}_{Kij}(z^{-1})}{\bar{A}_{Kij}(z^{-1})}\};\ i = 1, \ldots, q\,. \qquad (3.88)$$

Die Elemente der Polynommatrizen $\underline{A}_{K}(z^{-1})$ und $\underline{B}_{K}(z^{-1})$ erhält man dann wieder durch Bilden der Zeilenhauptnenner

$$A_{Ki}(z^{-1}) = \underset{1\le j\le q}{\text{kg V}}\ \{\bar{A}_{Kij}(z^{-1})\};\ i = 1, \ldots, q \qquad (3.89a)$$

$$B_{Kij}(z^{-1}) = \bar{B}_{Kij} \cdot \frac{A_{Ki}(z^{-1})}{\bar{A}_{Kij}(z^{-1})};\ i,j = 1, \ldots, q\,. \qquad (3.89b)$$

Da das Korrekturnetzwerk stabil sein muß (Gl.(3.3b)), müssen die Polynome $\bar{A}_{Kij}(z^{-1})$ $(i,j = 1, \ldots, q)$ alle Wurzeln im Einheitskreis haben. Diese Tatsache schränkt die Klasse der Regelstrecken, auf die das beschriebene Verfahren anwendbar ist, stark ein. Nach Gl.(3.88) enthält das Korrekturnetzwerk die Inverse der Transformationsmatrix $\underline{T}^{\Delta}_{G}(z^{-1})$ als Faktor, so daß das Verfahren nur dann anwendbar ist, falls diese inverse Transformationsmatrix, die nur von den Streckenparametern abhängt, ausschließlich stabile Übertragungsfunktionen enthält. Dies wird noch an einem Beispiel mit 3 Ein- und Ausgängen verdeutlicht werden.

Die Transformation der Matrix $\bar{\underline{G}}_{d}(z^{-1})$ auf Dreiecksform nach Gl.(3.78) kann mit Elementaroperationen durchgeführt werden. Eine Möglichkeit besteht darin, mit den sich von Schritt zu Schritt ergebenden Diagonalelementen (i,i) die mit einem höheren Zeilenindex $j > i$ versehenen Elemente derselben Spalte i, d. h. die Elemente, die unterhalb

---

[1] Selbstverständlich müssen für $\bar{\underline{G}}^{\Delta}_{d}$ und $\bar{\underline{G}}^{\Delta}_{Kd}$ dieselben Dreiecksformen angesetzt werden.

des Hauptdiagonalelementes (i,i) stehen, durch Addition eines Vielfachen der Zeile i zu Null zu ergänzen. Dabei wird in der ersten Spalte mit dem Element (2,1) begonnen; es folgen die Elemente (3,1), ..., (q,1), (3,2), ..., (q,2) bis (q, q-1). Die Operationen werden also von "oben nach unten" und von "links nach rechts" ausgeführt. Der Algorithmus ist in Bild 3.9 veranschaulicht. Für $\underline{\overline{G}}_d^{\Delta}(z^{-1})$ ergibt

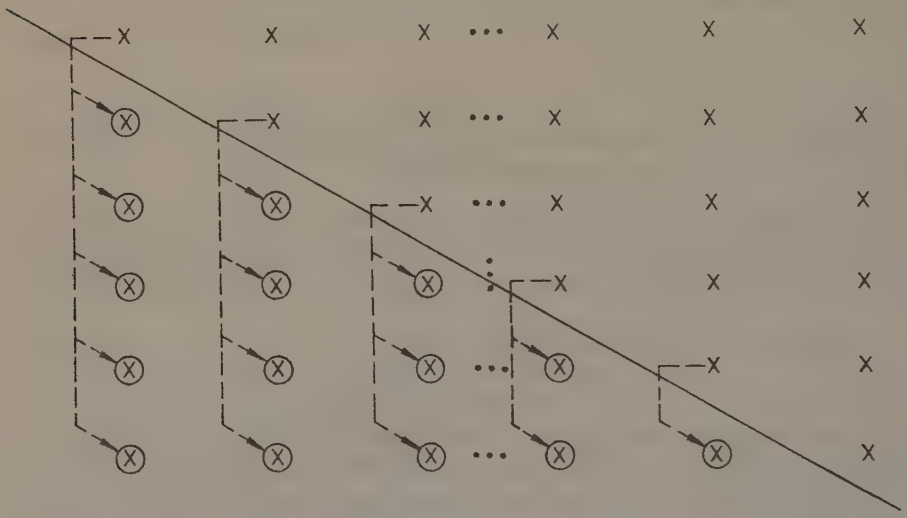


Bild 3.9. Elementaroperationen zur Erlangung der Dreiecksform. Die mit einem Kreis versehenen Elemente werden sukzessive zu Null ergänzt.

sich dann eine obere Dreiecksform. In Tabelle 3.1 wird der Algorithmus für ein 3x3 System explizit durchgeführt. Mit $\overline{G}_{dij}^{(\mu)}(z^{-1})$ werden dabei die sich nach dem μ-ten Transformationsschritt ergebenden Elemente bezeichnet. Es ist bekannt, daß dieselben Elementaroperationen angewandt auf eine Einheitsmatrix die Transformationsmatrix $\underline{T}_G^{\Delta}(z^{-1})$ liefern.

Es kann vorkommen, daß ein Diagonalelement $\overline{G}_{dii}^{(\mu)}(z^{-1})$ identisch Null und gleichzeitig noch mindestens ein Element $\overline{G}_{dji}^{(\mu)}(z^{-1})$ derselben

| $\mu$ | $\boxed{\bar{G}_d}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\bar{G}_{d11}$ | $\bar{G}_{d12}$ | $\bar{G}_{d13}$ | 1 | 0 | 0 |
| | $\bar{G}_{d21}$ | $\bar{G}_{d22}$ | $\bar{G}_{d23}$ | 0 | 1 | 0 |
| | $\bar{G}_{d31}$ | $\bar{G}_{d32}$ | $\bar{G}_{d33}$ | 0 | 0 | 1 |
| 1 | $\bar{G}_{d11}$ | $\bar{G}_{d12}$ | $\bar{G}_{d13}$ | 1 | 0 | 0 |
| | 0 | $\bar{G}_{d22} - \bar{G}_{d12}\frac{\bar{G}_{d21}}{\bar{G}_{d11}} = \bar{G}^{(1)}_{d22}$ | $\bar{G}_{d23} - \bar{G}_{d13}\frac{\bar{G}_{d21}}{\bar{G}_{d11}} = \bar{G}^{(1)}_{d23}$ | $-\frac{\bar{G}_{d21}}{\bar{G}_{d11}}$ | 1 | 0 |
| | $\bar{G}_{d31}$ | $\bar{G}_{d32}$ | $\bar{G}_{d33}$ | 0 | 0 | 1 |
| 2 | $\bar{G}_{d11}$ | $\bar{G}_{d12}$ | $\bar{G}_{d13}$ | 1 | 0 | 0 |
| | 0 | $\bar{G}^{(1)}_{d22}$ | $\bar{G}^{(1)}_{d23}$ | $-\frac{\bar{G}_{d21}}{\bar{G}_{d11}}$ | 1 | 0 |
| | 0 | $\bar{G}_{d32} - \bar{G}_{d12}\frac{\bar{G}_{d31}}{\bar{G}_{d11}} = \bar{G}^{(2)}_{d32}$ | $\bar{G}_{d33} - \bar{G}_{d13}\frac{\bar{G}_{d31}}{\bar{G}_{d11}} = \bar{G}^{(2)}_{d33}$ | $-\frac{\bar{G}_{d31}}{\bar{G}_{d11}}$ | 0 | 1 |
| 3 | $\bar{G}_{d11}$ | $\bar{G}_{d12}$ | $\bar{G}_{d13}$ | 1 | 0 | 0 |
| | 0 | $\bar{G}^{(1)}_{d22}$ | $\bar{G}^{(1)}_{d23}$ | $-\frac{\bar{G}_{d21}}{\bar{G}_{d11}}$ | 1 | 0 |
| | 0 | 0 | $\bar{G}^{(2)}_{d33} - \bar{G}^{(1)}_{d23}\frac{\bar{G}^{(2)}_{d32}}{\bar{G}^{(1)}_{d22}} = \bar{G}^{(3)}_{d33}$ | $-\frac{\bar{G}_{d31}}{\bar{G}_{d11}}$ | $-\frac{\bar{G}^{(2)}_{d32}}{\bar{G}^{(1)}_{d22}}$ | 1 |
| | | $\boxed{\bar{G}^{\Delta}_{d}}$ | | $\boxed{T^{\Delta}_{G}}$ | | |

Tabelle 3.1. Transformation eines 3x3 Systems auf Dreieckform mittels singulärer Elementaroperationen

Spalte für $j > i$ ungleich Null ist. In diesem Fall müssen die Zeilen j und i vertauscht werden, bevor die weiteren Elemente dieser Spalte, die unterhalb der Hauptdiagonalen stehen, zu Null ergänzt werden können. Das Vertauschen von Zeilen (oder Spalten) ist allerdings keine singuläre Elementaroperation, weil die Determinante pro Tauschoperation ihr Vorzeichen ändert. Werden $\nu$ Tauschoperationen durchgeführt, so gilt

$$\det \underline{T}_G^{\Delta}(z^{-1}) = (-1)^{\nu},$$

und auf den rechten Seiten der Gleichungen (3.79), (3.80) und (3.82) ist der Faktor $(-1)^{\nu}$ einzufügen. Da es in diesem Zusammenhang aber nur auf die Wurzeln der Determinante ankommt und diese invariant gegenüber Vorzeichenwechsel sind, sind Tauschoperationen von Zeilen (und Spalten) zulässig, und die Aussage 3.2 bleibt gültig.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß die Elementaroperationen natürlich auch von "unten nach oben" und von "rechts nach links" durchgeführt werden können, wobei mit dem Element (q-1, q) begonnen wird. Dann erhält man für $\underline{\bar{G}}_d^{\Delta}(z^{-1})$ eine untere Dreiecksmatrix.

Für ein 3x3 System nach Tabelle 3.1 ergibt sich die inverse Transformationsmatrix zu

$$[\underline{T}_G^{\Delta}(z^{-1})]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tilde{T}_{G21}^{\Delta}(z^{-1}) & 1 & 0 \\ \tilde{T}_{G31}^{\Delta}(z^{-1}) & \tilde{T}_{G32}^{\Delta}(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.90a)$$

mit

$$\tilde{T}_{G21}^{\Delta}(z^{-1}) = \frac{\bar{G}_{d21}(z^{-1})}{\bar{G}_{d11}(z^{-1})} \qquad (3.90b)$$

$$\tilde{T}^{\Delta}_{G31}(z^{-1}) = \frac{\bar{G}_{d21}(z^{-1})}{\bar{G}_{d11}(z^{-1})\ \bar{G}_{d22}(z^{-1}) - \bar{G}_{d12}(z^{-1})\ \bar{G}_{d21}(z^{-1})}$$

$$\cdot \left[\bar{G}_{d32}(z^{-1}) - \bar{G}_{d12}(z^{-1})\ \frac{\bar{G}_{d31}(z^{-1})}{\bar{G}_{d11}(z^{-1})}\right] \qquad (3.90c)$$

$$\tilde{T}^{\Delta}_{G32}(z^{-1}) = \frac{\bar{G}_{d11}(z^{-1})\ \bar{G}_{d32}(z^{-1}) - \bar{G}_{d12}(z^{-1})\ \bar{G}_{d31}(z^{-1})}{\bar{G}_{d11}(z^{-1})\ \bar{G}_{d22}(z^{-1}) - \bar{G}_{d12}(z^{-1})\ \bar{G}_{d21}(z^{-1})}\ . \qquad (3.90d)$$

Da entsprechend Gl.(3.88) diese Inverse multiplikativ in die Übertragungsmatrix $\underline{\bar{G}}_{Kd}(z^{-1})$ des zu realisierenden Korrekturnetzwerkes eingeht, ist die Stabilitätsbedingung nach Gl.(3.3b) für das Korrekturnetzwerk verletzt, falls $[\underline{T}^{\Delta}_{G}(z^{-1})]^{-1}$ instabile Übertragungsfunktionen enthält. Für das Beispiel nach Tabelle 3.1 bedeutet dies, daß die Funktionen $\bar{G}_{d21}(z^{-1})$, $\bar{G}_{d31}(z^{-1})$ und $\bar{G}_{d32}(z^{-1})$ keine Polstellen und die Funktionen $\bar{G}_{d11}(z^{-1})$ und $\bar{G}_{d11}(z^{-1})\ \bar{G}_{d22}(z^{-1}) - \bar{G}_{d12}(z^{-1}) \cdot G_{d21}(z^{-1})$ keine Nullstellen außerhalb des Einheitskreises der z-Ebene haben dürfen. Die letzte Forderung bezüglich der Nullstellen bedeutet, daß die Diagonalelemente

$$\bar{G}^{\Delta}_{d11}(z^{-1}) = \frac{B^{\Delta}_{11}(z^{-1})}{A^{\Delta}_{11}(z^{-1})} = \bar{G}_{d11}(z^{-1}) \qquad (3.91)$$

und

$$\bar{G}^{\Delta}_{d22}(z^{-1}) = \frac{\bar{B}^{\Delta}_{22}(z^{-1})}{\bar{A}^{\Delta}_{22}(z^{-1})} = \bar{G}_{d22}(z^{-1}) - \bar{G}_{d12}(z^{-1})\ \frac{\bar{G}_{d21}(z^{-1})}{\bar{G}_{d11}(z^{-1})} \qquad (3.92)$$

der Dreiecksmatrix minimalphasig sein müssen. Dann sind die inversen Funktionen $\bar{A}^{\Delta}_{11}(z^{-1})/\bar{B}^{\Delta}_{11}(z^{-1})$ und $\bar{A}^{\Delta}_{22}(z^{-1})/\bar{B}^{\Delta}_{22}(z^{-1})$ asymptotisch stabil, und die Diagonalelemente $\bar{G}^{\Delta}_{Kd11}(z^{-1})$ und $\bar{G}^{\Delta}_{Kd22}(z^{-1})$ des auf Dreiecksform transformierten Korrekturnetzwerkes können identisch Null gesetzt werden.

Man könnte nun auf den Gedanken kommen, die instabilen Polstellen der inversen Transformationsmatrix $[\underline{T}^{\Delta}_{G}(z^{-1})]^{-1}$ als Nullstellen in der Matrix $\underline{\bar{G}}^{\Delta}_{Kd}(z^{-1})$ vorzusehen, so daß bei der Rücktransformation nach Gl.(3.88) diese gekürzt werden können und sich ein stabiles Korrekturnetzwerk ergibt. Dann kann aber Gl.(3.86) im allgemeinen nicht mehr erfüllt werden. Auch dies soll an dem 3x3 System nach Tabelle 3.1 verdeutlicht werden. Angenommen die Übertragungsfunktion $\bar{G}_{d11}(z^{-1})$ habe eine Nullstelle außerhalb des Einheitskreises der z-Ebene, so daß gilt

$$\bar{G}_{d11}(z^{-1}) = \frac{(1-\beta\, z^{-1})\ \bar{B}'_{11}(z^{-1})}{\bar{A}_{11}(z^{-1})} \tag{3.93a}$$

mit

$$|\beta| > 1\,. \tag{3.93b}$$

Dann ist das Element $\tilde{T}^{\Delta}_{G21}(z^{-1})$ nach Gl.(3.90b) der inversen Transformationsmatrix eine instabile Übertragungsfunktion, falls nicht zufällig auch die Funktion $\bar{G}_{d21}(z^{-1})$ eine Nullstelle bei $z_o = \beta$ hat. Es gilt dann

$$\tilde{T}^{\Delta}_{G21}(z^{-1}) = \frac{1}{1-\beta\, z^{-1}}\ \frac{\bar{A}_{11}(z^{-1})\ \bar{B}_{21}(z^{-1})}{\bar{B}'_{11}(z^{-1})\ \bar{A}_{21}(z^{-1})}\,. \tag{3.94}$$

Bei der Rücktransformation nach Gl.(3.88) wird mit $T^{\Delta}_{G21}(z^{-1})$ (unter anderem) das Diagonalelement

$$\bar{G}^{\Delta}_{Kd11}(z^{-1}) = \frac{\bar{B}^{\Delta}_{K11}(z^{-1})}{\bar{A}^{\Delta}_{K11}(z^{-1})}$$

der Dreiecksmatrix $\underline{\bar{G}}^{\Delta}_{Kd}(z^{-1})$ des Korrekturnetzwerkes multipliziert. Damit ist aber die Übertragungsfunktion $\bar{G}_{Kd21}(z^{-1})$ des (rücktransformierten) Korrekturnetzwerkes nur dann stabil, falls $\bar{B}^{\Delta}_{K11}(z^{-1})$ eine Nullstelle bei $z_o = \beta$ besitzt, so daß diese Nullstelle gegen die Polstelle bei $z_o = \beta$ von $\tilde{T}^{\Delta}_{G21}(z^{-1})$ gekürzt werden kann. Dann läßt sich $\bar{B}^{\Delta}_{K11}(z^{-1})$ in die Faktoren

$$\bar{B}^{\Delta}_{K11}(z^{-1}) = (1 - \beta\, z^{-1})\, \bar{B}^{\Delta'}_{K11}(z^{-1}) \tag{3.95}$$

zerlegen, und es gilt unter Berücksichtigung von Gl.(3.91) und Gl. (3.93a):

$$\bar{A}^{\Delta}_{K11}(z^{-1})\, \bar{B}^{\Delta}_{11}(z^{-1}) + \bar{A}^{\Delta}_{11}(z^{-1})\, \bar{B}^{\Delta}_{K11}(z^{-1})$$

$$= (1 - \beta\, z^{-1})(\bar{A}^{\Delta}_{K11}(z^{-1})\, \bar{B}'_{11}(z^{-1}) + \bar{A}_{11}(z^{-1})\, \bar{B}^{\Delta'}_{K11}(z^{-1})). \tag{3.96}$$

Gl.(3.96) entspricht der linken Seite von Gl.(3.86) für $i = 1$. Da jedoch das Polynom nach Gl.(3.96) unabhängig vom Korrekturnetzwerk eine Wurzel bei $z_o = \beta$ außerhalb des Einheitskreises der z-Ebene aufweist, kann die Bedingung nach Gl.(3.86) nicht erfüllt werden. Dies kann auch dadurch erklärt werden, daß die Polynome $\bar{B}^{\Delta}_{K11}(z^{-1})$ und $\bar{B}_{11}(z^{-1})$ bei der Wahl nach Gl.(3.95) nicht teilerfremd sind, sondern den gemeinsamen Teiler $1 - \beta\, z^{-1}$ aufweisen, der kein Hurwitzpolynom ist.

Aufgrund der Rücktransformation nach Gl.(3.88) ist die Stabilität des Korrekturnetzwerkes also nicht garantiert und hängt von den Parametern der Regelstrecke ab. Diese Tatsache macht das Verfahren für eine Vielzahl von Regelstrecken unbrauchbar. Deshalb ist es so modifiziert worden, daß die Rücktransformation entfällt. Dazu wird folgender Entwurfsalgorithmus durchlaufen:

Sequentieller Algorithmus zum Entwurf des Korrekturnetzwerkes

1. Schritt: Es wird die Übertragungsfunktion $\bar{G}_{d11}(z^{-1})$ betrachtet. Es wird eine stabile Übertragungsfunktion

$$\bar{G}_{Kd11}(z^{-1}) = \frac{\bar{B}_{K11}(z^{-1})}{\bar{A}_{K11}(z^{-1})} \tag{3.97}$$

gesucht derart, daß die Summe

$$\bar{G}^{(1)}_{Ed11}(z^{-1}) = \bar{G}_{d11}(z^{-1}) + \bar{G}_{Kd11}(z^{-1}) \tag{3.98}$$

minimalphasig ist, d. h.

$$\bar{A}_{K11}(z^{-1})\ \bar{B}_{11}(z^{-1}) + \bar{A}_{11}(z^{-1})\ \bar{B}_{K11}(z^{-1}) \neq 0$$
$$\text{für alle } |z| \geq 1. \tag{3.99}$$

Hierzu können die in Abschnitt 3.5.1 diskutierten Methoden herangezogen werden. Man bildet nun die Matrizen

$$\underline{\bar{G}}^{(1)}_{Kd}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{Kd11}(z^{-1}) & 0 \ \ldots\ 0 \\ 0 & \\ \vdots & \underline{0} \\ 0 & \end{bmatrix} \tag{3.100}$$

und

$$\underline{\bar{G}}^{(1)}_{Ed}(z^{-1}) = \underline{\bar{G}}_{d}(z^{-1}) + \underline{\bar{G}}^{(1)}_{Kd}(z^{-1}). \tag{3.101}$$

2. bis q-ter Schritt: Für i = 2, ..., q werden folgende Zwischenschritte (a) bis (c) durchgeführt:

(a) Durch singuläre Zeilenoperationen werden die Elemente $\bar{G}^{(i-1)}_{Edi,i-1}(z^{-1})$ bis $\bar{G}^{(i-1)}_{Edq,i-1}(z^{-1})$ der (i-1)-ten Spalte der Matrix $\underline{\bar{G}}^{(i-1)}_{Ed}(z^{-1})$ zu Null ergänzt. Es entsteht die Matrix

$$\underline{\bar{G}}^{(i-1)}_{EdT}(z^{-1}) = \underline{T}^{(i-1)}(z^{-1})\ \underline{\bar{G}}^{(i-1)}_{Ed}(z^{-1}), \tag{3.102}$$

wobei die Transformationsmatrix die Form

$$\underline{T}^{(i-1)}(z^{-1}) = \left[\begin{array}{c|c|c} & & \\ & \underline{I}_{i-1} & \underline{0} \\ & & \\ \hline & T^{(i-1)}_{i,i-1}(z^{-1}) & \\ \underline{0} & \vdots & \underline{I}_{q+1-i} \\ & T^{(i-1)}_{q,i-1}(z^{-1}) & \end{array}\right] \leftarrow \text{i-te Zeile}$$

$$\uparrow$$

$$(i-1)\text{te Spalte} \qquad (3.103a)$$

mit

$$T^{(i-1)}_{j,i-1}(z^{-1}) = -\frac{\bar{G}^{(i-1)}_{Edj,i-1}(z^{-1})}{\bar{G}^{(i-1)}_{Edi-1,i-1}(z^{-1})} \quad ; \quad j = 1, \ldots, q \qquad (3.103b)$$

hat.

ⓑ Es wird das Diagonalelement (i,i) der Matrix $\underline{\bar{G}}^{(i-1)}_{EdT}(z^{-1})$, d. h. die Funktion

$$\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1}) = \frac{\bar{B}^{(i-1)}_{ETi,i}(z^{-1})}{\bar{A}^{(i-1)}_{ETi,i}(z^{-1})} \qquad (3.104)$$

betrachtet. Es wird eine stabile Übertragungsfunktion

$$\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1}) = \frac{\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})}{\bar{A}_{Ki,i}(z^{-1})} \qquad (3.105)$$

gesucht derart, daß die Summe

$$\bar{G}^{(i)}_{Edi,i}(z^{-1}) = \bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1}) + \bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1}) \qquad (3.106)$$

minimalphasig ist, d. h.

$$\bar{A}_{Ki,i}(z^{-1})\ \bar{B}^{(i-1)}_{ETi,i}(z^{-1}) + \bar{A}^{(i-1)}_{ETi,i}(z^{-1})\ \bar{B}_{Ki,i}(z^{-1}) \neq 0$$

für alle $|z| \geq 1$. (3.107)

ⓒ Es werden die Matrizen

$$\underline{\bar{G}}^{(i)}_{Kd}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \text{i-te Spalte} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & \bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1}) & \underline{0}^T \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{i-te Zeile} \\ \\ \end{matrix} \quad (3.108)$$

und

$$\underline{\bar{G}}^{(i)}_{Ed}(z^{-1}) = \underline{\bar{G}}^{(i-1)}_{EdT}(z^{-1}) + \underline{\bar{G}}^{(i)}_{Kd}(z^{-1}) \quad (3.109)$$

gebildet.

Die Zwischenschritte ⓐ, ⓑ und ⓒ werden vom 2. bis zum q-ten Entwurfsschritt durchgeführt. Im 1. Schritt entfällt der Transformationsschritt ⓐ. Die Transformation nach Gl.(3.102) ist nicht möglich, falls das Element $\bar{G}^{(i-1)}_{Edi-1,i-1}(z^{-1})$ identisch Null ist (vgl. Gl.(3.103b)). Dieser Fall kann hier aber ausgeschlossen werden, da er durch geeignete Wahl der Funktion $\bar{G}_{Kdi-1,i-1}(z^{-1})$ entsprechend Gl.(3.108) und Gl.(3.109) stets verhindert werden kann.

Das Gesamtkorrekturnetzwerk ergibt sich nun aus

Satz 3.3. Mit $\underline{\bar{G}}^{(i)}_{Kd}(z^{-1})$ werden die im i-ten Entwurfsschritt des sequentiellen Algorithmus' gefundenen Korrekturnetzwerke nach Gln.(3.100) und (3.108) bezeichnet, deren einziges von Null verschiedenes Element $\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})$ entsprechend den Gln.(3.97) und (3.105) so bestimmt ist, daß die Bedingungen nach den Gln. (3.99) und (3.107) erfüllt sind. Wählt man dann das Gesamtkorrekturnetzwerk zu

$$\bar{\underline{G}}_{Kd}(z^{-1}) = \sum_{i=1}^{q} \bar{\underline{G}}_{Kd}^{(i)}(z^{-1})$$

$$= \mathrm{diag}\{\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})\}$$

$$= \mathrm{diag}\left\{\frac{\bar{B}_{Kii}(z^{-1})}{\bar{A}_{Kii}(z^{-1})}\right\}; \quad i = 1, \ldots, q, \qquad (3.110)$$

so ist Gl.(3.77) erfüllt, d. h. es gilt

$$\det[\bar{\underline{G}}_{d}(z^{-1}) + \bar{\underline{G}}_{Kd}(z^{-1})] \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1 .$$

Dieser Satz ist in Anhang A2 bewiesen.

Auch bei dem sequentiellen Entwurfsalgorithmus wird der Entwurf des Korrekturnetzwerkes für ein Mehrgrößensystem mit q Ein- und Ausgängen auf den Entwurf für q (entkoppelte) Eingrößensysteme entsprechend den Gln.(3.99) und (3.107) zurückgeführt. Nach Gln. (3.75b) und (3.110) erhält man unter den Voraussetzungen der Aussage .3.1 für die nach Gl.(3.2) zu realisierenden Polynommatrizen $\underline{A}_K(z^{-1})$ und $\underline{B}_K(z^{-1})$ die Diagonalformen

$$\underline{A}_K(z^{-1}) = \mathrm{diag}\{\bar{A}_{Ki,i}(z^{-1})\}; \; i = 1, \ldots, q \qquad (3.111a)$$

$$\underline{B}_K(z^{-1}) = \mathrm{diag}\{\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})\}; \; i = 1, \ldots, q . \qquad (3.111b)$$

3.5.1.3. Diskussion des sequentiellen Entwurfsalgorithmus'

Das Korrekturnetzwerk ist (asymptotisch) stabil, falls die Polynome $\bar{A}_{Ki,i}(z^{-1})$ für i = 1 bis q Hurwitzpolynome sind. Können somit die Bedingungen nach Gl.(3.99) und Gl.(3.107) mit (asymptotisch) stabilen Übertragungsfunktionen erfüllt werden, führt das Verfahren zum Erfolg. Dies ist sicher dann der Fall, falls die Übertragungsfunktionen $G_{11}(z^{-1})$ der Regelstrecke und die sich von Schritt zu Schritt ergebenden Übertragungsfunktionen $\bar{G}_{EdTi,i}^{(i-1)}(z^{-1})$ nach Gl.(3.104) asymptotisch stabil sind (vgl. Abschnitt 3.5.1). Letzteres ist gewährleistet, wenn die Regelstrecke selbst nur aus asymptotisch sta-

bilen Teilübertragungsfunktionen besteht, wie in Anhang A3 gezeigt ist. Da det $\underline{A}(z^{-1})$ für asymptotisch stabile Regelstrecken ein Hurwitzpolynom ist, sind die Voraussetzungen von Aussage 3.1 (bei einem asymptotisch stabilen Korrekturnetzwerk) in diesem Fall trivial. Für asymptotisch stabile Mehrgrößensysteme ist es also immer möglich, durch die Parallelschaltung eines stabilen Korrekturnetzwerkes mit Diagonalstruktur (vgl. Gl.(3.111a,b)) eine erweiterte Regelstrecke zu erhalten, die Gl.(3.7) erfüllt.

Ist die Regelstrecke instabil, so kann es vorkommen, daß die Bedingung nach Gl.(3.107) mit einem Hurwitzpolynom $\bar{A}_{Ki,i}(z^{-1})$ nicht zu erfüllen ist (vgl. Abschnitt 3.5.1). Dann muß - wie im Eingrößenfall - eine zusätzliche Rückführung vorgesehen werden. Der sequentielle Entwurfsalgorithmus liefert auch den Hinweis, wie dies zu machen ist. Dies ist in Anhang A4 erläutert. Es ist aber auch möglich, daß durch eine Umnumerierung der Ein- und Ausgänge der Regelstrecke, d. h. eine Vertauschung von Zeilen und Spalten der entsprechenden Übertragungsmatrix das hier angsprochene Problem umgangen werden kann.

Eine interessante Eigenschaft des sequentiellen Entwurfsalgorithmus wird im folgenden Satz deutlich:

Satz 3.4. Mit $\bar{\underline{G}}_{di}(z^{-1})$ wird die nordwestliche quadratische Untermatrix mit der Dimension ixi der Übertragungsmatrix $\bar{\underline{G}}_{d}(z^{-1})$ der Regelstrecke bezeichnet, d. h.

$$\bar{\underline{G}}_{di}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{d11}(z^{-1}) & \dots & \bar{G}_{d1,i}(z^{-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{G}_{di,1}(z^{-1}) & \dots & \bar{G}_{di,i}(z^{-1}) \end{bmatrix}. \qquad (3.112)$$

Sind die Funktionen $\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})$ nach Gl.(3.97), (3.105) identisch Null für i = 1 bis l, $l \leq q$, so gilt

$$\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1}) = \frac{\det \bar{\underline{G}}_{di}(z^{-1})}{\det \bar{\underline{G}}_{di-1}(z^{-1})}; \quad i = 1, \dots, l, \qquad (3.113)$$

wobei formal

$$\bar{G}^{(0)}_{EdT11}(z^{-1}) := \bar{G}_{d11}(z^{-1}) \tag{3.114a}$$

$$\det \underline{\bar{G}}_{d0}(z^{-1}) := 1 \tag{3.114b}$$

definiert wird.

Der Beweis findet sich in Anhang A5. Aus diesem Satz ergibt sich die

Schlußfolgerung 3.5. Besitzen für ein $1 \leq q$ alle Determinanten der Untermatrizen $\underline{\bar{G}}_{d1}(z^{-1})$ bis $\underline{\bar{G}}_{dl}(z^{-1})$ nur Null- und Polstellen innerhalb des Einheitskreises $|z| < 1$ der z-Ebene, so können die Elemente $\bar{G}_{Kd11}(z^{-1})$ bis $\bar{G}_{Kdl,1}(z^{-1})$ des Korrekturnetzwerkes identisch Null gewählt werden.

Man erkennt, daß unter der Voraussetzung von Schlußfolgerung 3.5 die Elemente $G^{(i-1)}_{EdTii}(z^{-1})$ nach Gl.(3.112) für $i = 1$ bis $l$ minimalphasig sind, so daß die Bedingungen Gl.(3.99) und Gl.(3.107) für $i = 1$ bis $l$ auch für $\bar{B}_{Kii}(z^{-1}) \equiv 0$ (und formal $\bar{A}_{Kii}(z^{-1}) \equiv 1$) erfüllt sind. Existiert überhaupt ein $l \neq 0$, für das die Voraussetzung nach Schlußfolgerung 3.5 gilt, so kann die Größe dieses Wertes $l$ durchaus von der Streckendarstellung, d. h. der Numerierung der Ein- und Ausgänge, abhängen. Dies ist insofern nicht verwunderlich, als Satz 3.3 nur eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von Gl.(3.77) liefert. Im Sinne eines möglichst geringen Realisierungsaufwandes lohnt es sich also, eine Streckendarstellung zu suchen, bei der $l$ möglichst groß ist.

Das hier beschriebene Verfahren ist für Systeme mit zwei Ein- und Ausgängen auf einem Prozeßrechner als interaktives Programm implementiert und praktisch erprobt worden (Nadolph (1982)). Die Lage der Wurzeln von $\det \underline{\bar{G}}_d(z^{-1})$ wird dabei zunächst mit Hilfe eines

algebraischen Stabilitätskriteriums abgeschätzt. Hierzu steht das Jury- oder - in Verbindung mit der w-Transformation - das Routh-Kriterium (Parks und Hahn (1981)) zur Verfügung. Von den Funktionen $\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})$ des Korrekturnetzwerkes können die Pol- und Nullstellen interaktiv vorgegeben werden. Für die normierte Darstellung

$$\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1}) = K_{Ki} \frac{\prod_{l=1}^{n(\bar{B}_{Ki,i})} (1 - \beta_{Kil}\, z^{-1})}{\prod_{l=1}^{n(\bar{A}_{Ki,i})} (1 - \alpha_{Kil}\, z^{-1})} \; ; \; i = 1, \ldots, q \tag{3.115}$$

der Elemente des Korrekturnetzwerkes wird dann - wieder unter Anwendung eines algebraischen Stabilitätskriteriums - der Wertebereich der Vorfaktoren $K_{Ki}$ berechnet, für den die Bedingungen nach Gl.(3.99) bzw. Gl.(3.107) erfüllt sind. Die Transformation nach Gl.(3.103a,b) bereitet für 2x2 Systeme noch keine großen numerischen Probleme, wenn die einzelnen Übertragungsfunktionen $\bar{G}_{dij}(z^{-1})$ der Regelstrecke und $\bar{G}_{Kdii}(z^{-1})$ des Korrekturnetzwerkes maximal dritter Ordnung sind. Allerdings dürften für höhere Ordnungen, die sich bei einer Regelstrecke mit vielen Ein- und Ausgängen bei dem sequentiellen Entwurfsalgorithmus zwangsläufig ergeben, numerische Ungenauigkeiten einen großen Einfluß haben. In solchen Fällen ist es günstiger, statt mit den Übertragungsfunktionen mit tabellarisch abgelegten Frequenzgängen zu arbeiten, die numerisch zuverlässigere Ergebnisse liefern. Die Bedingungen nach Gl.(3.99) und Gl.(3.107) sind ja erfüllt, falls die rückgekoppelten Systeme nach Bild 3.10 asymptotisch stabil sind, wobei formal

$$\frac{\bar{A}^{(0)}_{ET11}(z^{-1})}{\bar{B}^{(0)}_{ET11}(z^{-1})} := \frac{1}{\bar{G}_{d11}(z^{-1})}$$

gesetzt wird. Eine Rückführung $\bar{B}_{Kii}(z^{-1})/\bar{A}_{Kii}(z^{-1})$, die das System $\bar{A}^{(i-1)}_{ETii}(z^{-1})/\bar{B}^{(i-1)}_{ETii}(z^{-1})$ stabilisiert, kann auch direkt mit Hilfe der Frequenzkennlinien gefunden werden (Unbehauen (1982)).

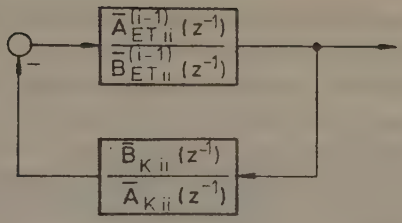



Bild 3.10. Rückgekoppeltes System mit der charakteristischen Gleichung (3.107)

### 3.5.2. Entwurf des Korrekturnetzwerks mit Hilfe von Parameteroptimierungsmethoden

Um bestimmte Anforderungen an das dynamische Verhalten der Regel- und der Stellgrößen bei festliegender Struktur, aber noch freien Parametern des Reglers möglichst gut erfüllen zu können, können Parameteroptimierungsmethoden angewendet werden. Solche Verfahren der Parameteroptimierung sind auch gut für den Entwurf des in diesem Kapitel behandelten Reglers mit Korrekturnetzwerk geeignet. Die Struktur dieses Reglers liegt nach Bild 3.2 bzw. Bild 3.3 fest. Die freien Entwurfsparameter bilden hier die Übertragungsmatrizen des Parallelmodells, des Korrekturnetzwerks und des Vorfilters. Nach Festlegung dieser Übertragungsmatrizen ist der Regler eindeutig bestimmt. [1] Ziel dieses Abschnitts ist es, eine Klasse sinnvoller Gütefunktionale zu entwickeln, deren Optimierung auf ein stabiles Verhalten des gesamten Regelungssystems führt.

---

[1] Natürlich ist es genauso gut möglich, direkt die Parameter des Reglers zu optimieren und nicht den Regler mit Hilfe des optimierten Parallelmodells und Korrekturnetzwerks zu berechnen. Dieser direkte Weg ist jedoch im Hinblick auf die adaptive Realisierung nach Kapitel 4 nicht sinnvoll.

Obwohl in die Parameteroptimierung das Parallelmodell und das Vorfilter einbezogen werden können, beschränken sich die folgenden Ausführungen der Einfachheit halber im wesentlichen auf die Optimierung des Korrekturnetzwerks, wobei angenommen wird, daß das Parallelmodell bereits festliegt. Das Vorfilter hingegen kann auch noch nach der Optimierung dimensioniert werden. Die Optimierung soll auf das deterministische Verhalten der Regelung beschränkt werden, so daß in diesem Abschnitt keine stochastischen Störungen, d. h. $\underline{\varepsilon}(z) \equiv \underline{0}$, angenommen werden.

Es wird ein stationär genauer Regler mit explizitem $(n_z+1)$-fachen I-Verhalten zugrunde gelegt. Stationäre Genauigkeit bedeutet nach Abschnitt 3.3.3, daß die Regelgrößen $\underline{y}$ für $k\to\infty$ den Ausgangsgrößen $\underline{y}_M$ des Parallelmodells bei rein deterministischen Störungen, d. h. $\underline{\varepsilon}(z) \equiv \underline{0}$, exakt folgen. Somit gilt

$$\lim_{k\to\infty} \underline{y}(k) = \lim_{k\to\infty} \underline{y}_M(k). \tag{3.116}$$

Mit Gl.(3.32b) und Gl.(3.30b) ergibt sich aus Gl.(3.19) bei rein deterministischen Störungen

$$\lim_{k\to\infty} \underline{e}(k) = -\lim_{z\to 1} \{(1-z^{-1})^{n_z+2}\, \underline{Q}'(z^{-1})\, \underline{z}(z)\}$$

$$= \underline{0}. \tag{3.117}$$

Nach Gl.(3.8) wiederum gilt

$$\lim_{k\to\infty} \underline{y}_K(k) = \lim_{k\to\infty} \underline{y}_M(k) - \lim_{k\to\infty} \underline{y}(k) - \lim_{k\to\infty} e(k), \tag{3.118}$$

woraus man für den stationär genauen Regler mit Gln.(3.116) und (3.117)

$$\lim_{k\to\infty} \underline{y}_K(k) = \underline{0} \tag{3.119}$$

erhält.

Für stabile Regelungen, bei denen ein stationär genauer Regler eingesetzt wird, gilt (für $\underline{\varepsilon}(z) \equiv \underline{0}$) auch

$$\lim_{k\to\infty} \underline{u}_{dI}(k) = \underline{0} . \tag{3.120}$$

Dies ergibt sich aus folgender Überlegung. Mit Gl.(3.30a) folgt bei stabilem Parallelmodell und stabilem Vorfilter aus Gl.(2.37) unter Berücksichtigung von Gl.(2.39)

$$\lim_{z\to 1} (1-z^{-1})^{n_z+2} \underline{Y}_M(z) = \underline{0} . \tag{3.121}$$

Mit Gl.(3.117) und Gl.(3.121) erhält man aus Gl.(3.8)

$$\lim_{z\to 1} (1-z^{-1})^{n_z+2} \underline{Y}_E(z) = \underline{0} . \tag{3.122}$$

Aus Gl.(3.5a) gewinnt man für $\underline{\varepsilon}(z) \equiv \underline{0}$ die Darstellung

$$\begin{aligned}(1-z^{-1})^{n_z+2} \underline{u}_d(z) = \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\, z^{\bar{d}_e}\, \underline{B}_E^{-1}(z^{-1}) \\ [\underline{A}_E(z^{-1})\ (1-z^{-1})^{n_z+2}\ \underline{Y}_E(z) \\ + \underline{A}_K(z^{-1})\ (1-z^{-1})^{n_z+2}\ \underline{z}(z)] .\end{aligned} \tag{3.123}$$

Mit Gl.(3.122) und Gl.(3.30b) folgt aus Gl.(3.123)

$$\lim_{z\to 1} (1-z^{-1})^{n_z+2} \underline{u}_d(z) = \underline{0} , \tag{3.124}$$

falls $\underline{B}_E(1)$ endlich ist. Dies ist aber für stabile Regelungen der Fall, da laut Gl.(3.7) dann det $\underline{B}_E(z^{-1})$ alle Wurzeln innerhalb des Einheitskreises hat. Ist aber det $B_E(z^{-1})$ ein Hurwitzpolynom, so gilt für Gl.(3.113) und damit auch für Gl.(3.124) der Grenzwertsatz der $\mathcal{Z}$-Transformation. Unter Berücksichtigung von Gl.(3.33)

$$\underline{u}_{dI}(z) = (1-z^{-1})^{n_z+1} \underline{u}_d(z)$$

folgt aus Gl.(3.124) mit dem Grenzwertsatz der $\mathcal{Z}$-Transformation direkt Gl.(3.120).

Da es sich bei dem hier betrachteten Regelkreis um ein asymptotisch stabiles *lineares* System handelt, konvergieren die Signalvektoren $\underline{y}_K$ und $\underline{u}_{dI}$ nach Gl.(3.119) und Gl.(3.120) *exponentiell* gegen Null. Dies bedeutet, daß für beliebige symmetrische positiv definite Matrizen

$$\underline{R} = \underline{R}^T > 0 \tag{3.125}$$

der Dimension $2q \times 2q$ die unendlichen Reihen

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} [\underline{y}_K^T(k),\ \underline{u}_{dI}^T(k)]\ \underline{R} \begin{bmatrix} \underline{y}_K(k) \\ \underline{u}_{dI}(k) \end{bmatrix} \tag{3.126}$$

für stabile Regelungen in der Struktur nach Bild 3.3 unter Einsatz eines Reglers mit explizitem $(n_z+1)$-fachen I-Verhalten einen endlichen Grenzwert haben. Die Matrix $\underline{R}$ kann in die qxq Untermatrizen

$$\underline{R} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{R}_y & R_{yu} \\ \hline R_{yu}^T & \underline{R}_u \end{array}\right] \tag{3.127}$$

mit

$$\underline{R}_y = \underline{R}_y^T > 0 \tag{3.128}$$

$$\underline{R}_u = \underline{R}_u^T > 0 \tag{3.129}$$

aufgespalten werden. Gl.(3.128) und Gl.(3.129) sind dabei notwendige Voraussetzungen für die Gültigkeit von Gl.(3.125).

Für den Entwurf des Korrekturnetzwerks wird nun der bisherige Gedankengang umgekehrt. Für den stationär genauen Regler mit explizitem $(n_z+1)$-fachen I-Verhalten werden bei festliegender Struktur des Reglers nach Bild 3.3, bei festliegendem stabilen Parallelmodell und für eine vorgegebene Ordnung des Korrekturnetzwerks die Gütefunktionale

$$I(\underline{p}_K) = \sum_{k=0}^{\infty} [\underline{y}_K^T(k), \underline{u}_{dI}^T(k)] \underline{R} \begin{bmatrix} \underline{y}_K(k) \\ \underline{u}_{dI}(k) \end{bmatrix} \tag{3.130}$$

für eine beliebige symmetrische und positiv definite Bewertungsmatrix $\underline{R}$ nach Gln.(3.127) bis (3.129) bezüglich des Vektors $\underline{p}_K$, in dem Parameter des Korrekturnetzwerks zusammengefaßt sind, minimiert. Dazu werden Parameteroptimierungsmethoden eingesetzt. Nach wie vor wird dabei vorausgesetzt, daß die Matrix $\underline{A}_K(z^{-1})$ der Nennerpolynome des Korrekturnetzwerks nach Gl.(3.3a) mit Diagonalform angesetzt wird. Für die Matrix $\underline{B}'_K(z^{-1})$ (vgl. Gl.(3.3c) und Gl.(3.32a)) der Zählerpolynome wird diese Voraussetzung jedoch nicht gemacht; sie kann eine beliebige Struktur haben.

Bevor auf die physikalische Bedeutung des Gütekriteriums nach Gl. (3.130) eingegangen wird, soll die Stabilität des sich ergebenden Regelkreises erörtert werden. Führt die Minimumsuche von $I(\underline{p}_K)$ auf einen beschränkten Wert des Funktionals, der nicht schon notwendigerweise das Minimum darstellen muß, so folgt hieraus die Gültigkeit von Gl.(3.119) und Gl.(3.120). Gl.(3.119) bedeutet, daß die Regelgrößen gegen die beschränkten Ausgangsgrößen des Parallelmodells konvergieren. Somit sind die Regelgrößen beschränkt. Für einfaches explizites I-Verhalten ($n_z = 0$) stellt nach Gl.(3.33) der Vektor $\underline{u}_{dI}$ im Zeitbereich das Inkrement des Vektors $\underline{u}_d$ dar; es gilt

$$\underline{u}_d(k) = \underline{u}_d(k-1) + \underline{u}_{dI}(k) \text{ für } n_z = 0 . \tag{3.131}$$

Gl.(3.131) läßt sich auch in der nicht rekursiven Form

$$\underline{u}_d(k) = \sum_{\nu=0}^{k} \underline{u}_{dI}(\nu) \text{ für } n_z = 0 \tag{3.132}$$

darstellen. Da es sich bei dem betrachteten Regler um einen linearen Regler handelt, also ein lineares System optimiert wird, konvergiert bei beschränktem Gütefunktional der Signalvektor $\underline{u}_{dI}$ entsprechend Gl.(3.120) wiederum exponentiell gegen Null. Nach Gl.(3.132)

bedeutet dies, daß für $n_z = 0$ der Vektor $\underline{u}_d$ beschränkt ist. Entsprechend Gl.(2.43) ist dann die Beschränktheit der Stellgrößen $\underline{u}$ trivial. Somit ist das gesamte Regelungssystem asymptotisch stabil. Da nach Abschnitt 3.3.2 Gl.(3.3b) und Gl.(3.7) zusammen mit Gl.(2.38b) eine notwendige und hinreichende Stabilitätsbedingung für den hier betrachteten geschlossenen Regelkreis darstellen, werden sie somit automatisch durch jene Parametersätze $\underline{p}_K$ des Korrekturnetzwerks erfüllt, für die das Funktional $I(\underline{p}_K)$ nach Gl.(3.130) einen beschränkten Wert annimmt. Der Regler mit einfachem expliziten I-Verhalten ist stationär genau für sprungförmige Sollwertänderungen und Störungen. Für Störungen und Sollwerte, die nicht die Bedingungen nach Gl.(3.28a) bzw. Gl.(3.28b) für $n_z = 0$ erfüllen, die also für $k \to \infty$ sich nicht durch konstante Werte majorisieren lassen, konvergieren die Signalvektoren $\underline{y}_K$ und $\underline{u}_{dI}$ nicht gegen Null, wenn ein Regler mit nur einfachem expliziten I-Verhalten eingesetzt wird. Dann ist $I(\underline{p}_K)$ nach Gl.(3.130) unabhängig vom Korrekturnetzwerk stets unbeschränkt. Die vorangegangenen Überlegungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

> Schlußfolgerung 3.6. Führt die Optimierung des Gütefunktionals $I(\underline{p}_K)$ für den Regler mit einfachem I-Verhalten bei Anregung durch sprungförmige Stör- und/oder Führungsgrößen auf einen beschränkten Wert dieses Funktionals für einen bestimmten Parametervektor $\underline{p}_K$, so ist für diese Parameter des Korrekturnetzwerks das gesamte Regelungssystem nach Bild 3.3 stabil, und Gl.(3.3b) und Gl.(3.7) sind automatisch erfüllt.

Es sei noch einmal betont, daß die Stabilitätseigenschaften nach Schlußfolgerung 3.6 nur erfordern, daß der Wert des Funktionals $I(\underline{p}_K)$ beschränkt ist. Es ist nicht erforderlich, daß das Minimum gefunden wird.

Schlußfolgerung 3.6 behandelt den praktisch wichtigen Fall einfachen expliziten I-Verhaltens des Reglers. Für mehrfaches explizites I-Verhalten, d. h. $n_z \geq 1$, kann leider nicht mehr direkt aus

der Beschränktheit des Funktionals $I(\underline{p}_K)$ die Stabilität des geschlossenen Regelkreises gewährleistet werden. In diesem Fall müssen Gl.(3.3b) und Gl.(3.7) als Nebenbedingungen bei der Parameteroptimierung explizit mitberücksichtigt werden.

Die Frage, ob für eine bestimmte Regelstrecke überhaupt ein Parameteransatz $\underline{p}_K$ des Korrekturnetzwerks existiert, für den das Funktional $I(\underline{p}_K)$ nach Gl.(3.130) einen beschränkten Wert annimmt (dies ist eine notwendige Voraussetzung für die Existenz eines Minimums), ist nicht trivial. Mit den im Abschnitt 3.5.1 entwickelten Methoden kann durch Auswertung der Gleichungen (3.99) und (3.107) für $i = 2$ bis $q$ z. B. mit Hilfe der Wurzelortskurven im konkreten Fall entschieden werden, ob für den stationär genauen Regler überhaupt ein stabiles Korrekturnetzwerk existiert, das Gl.(3.7) erfüllt. Ist dies nicht der Fall, so existiert für das Gütefunktional nach Gl.(3.130) kein Minimum. Dann muß die Struktur der Regelung (z. B. mit der Modifikation nach Anhang A4) geändert werden. In Kapitel 4 wird gezeigt, daß für eine asymptotisch stabile Regelstrecke für den Regler mit einfachem expliziten I-Verhalten stets (beliebig viele) Korrekturnetzwerke existieren, so daß der gesamte Regelkreis asymptotisch stabil ist (vgl. Schlußfolgerung 4.5). Somit existieren für eine asymptotisch stabile Regelstrecke (beliebig viele) Parametersätze $\underline{p}_K$, für die das Gütefunktional nach Gl. (3.130) bei Anregung des Regelkreises durch sprungförmige Störungen und/oder Sollwertänderungen und bei Verwendung eines Reglers mit einfachem I-Verhalten beschränkt ist.

Das Gütefunktional nach Gl.(3.130) kann auch in der Form

$$I(\underline{p}_K) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \underline{y}_K^T(k)\ \underline{R}_y\ \underline{y}_K(k) + 2\ \underline{y}_K^T(k)\ \underline{R}_{yu}\ \underline{u}_{dI}(k) + \underline{u}_{dI}^T(k)\ \underline{R}_u\ \underline{u}_{dI}(k) \right]$$

dargestellt werden. Mit dieser Form läßt sich die Beziehung des Gütefunktionals zu dem Zeitverhalten der Stell- und Regelgrößen intuitiv folgendermaßen erfassen. Der Term $\underline{y}_K^T(k)\ \underline{R}_y\ \underline{y}_K(k)$ gewichtet

die Ausgangsgrößen des Korrekturnetzwerks, die entsprechend Gl. (3.8) und Gl.(3.19) im störungsfreien Fall nichts anderes darstellen, als die Abweichungen der Regelgrößen $\underline{y}$ von den Ausgangsgrössen $\underline{y}_M$ des Parallelmodells. Für das Störverhalten, d. h. für

$$\underline{w}(z) = \underline{w}_V(z) = \underline{y}_M(z) \equiv \underline{0},$$

gilt nach Gl.(3.8) und Gl.(3.19)

$$\underline{y}(z) = \underline{A}_M^{-1}(z^{-1})\ (\underline{I}-\underline{R}(z^{-1})\ z^{-1})(\underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z)) - \underline{y}_K(z). \tag{3.133}$$

Hier beschreibt der Signalvektor $\underline{y}_K$ die Abweichung der Regelgrößen von dem Störverhalten, das sich ohne Korrekturnetzwerk ergibt (vgl. Gl.(2.69)). Mit dem Term $\underline{u}_{dI}^T(k)\ \underline{R}_u\ \underline{u}_{dI}(k)$ wird der Stellaufwand gewichtet. Die physikalische Bedeutung der Kreuzbewertung $2\ \underline{y}_K^T(k)\ \underline{R}_{yu}\ \underline{u}_{dI}(k)$ ist anschaulich allerdings nicht zu deuten. Sie kann aber der Einfachheit halber durch die Wahl

$$\underline{R}_{yu} = \underline{0}$$

ausgeschaltet werden.

Durch starke Bewertung der Signale $\underline{y}_K$, d. h. große Eigenwerte der Matrix $\underline{R}_y$, und schwache Bewertung der Größen $\underline{u}_{dI}$, d. h. kleine Eigenwerte der Matrix $\underline{R}_u$, erreicht man also, daß sich die Regelgrößen ähnlich verhalten wie im Fall ohne Korrekturnetzwerk. Dies bedingt auch eine näherungsweise entkoppelnde Wirkung des Reglers, da der Regler ohne Korrekturnetzwerk nach Abschnitt 2.4.2 eine vollständige Entkopplung bewirkt. Eine solche Bewertung ist also dann angebracht, wenn ein Korrekturnetzwerk aus Stabilitätsgründen erforderlich ist, die dynamischen Eigenschaften des Korrekturnetzwerks aber im Prinzip unerwünscht sind und auf den Stellaufwand keine Rücksicht genommen werden muß. Spielt jedoch der Stellaufwand eine große Rolle, und sind die Anforderungen an das dynamische Verhalten der Regelgrößen durch eine relativ hohe Toleranzbreite gekennzeichnet, so sind die Signale $\underline{u}_{dI}$ stärker zu gewichten.

Das hier beschriebene Verfahren der Parameteroptimierung ist für Mehrgrößensysteme bisher noch nicht angewandt worden. Allerdings ist es bereits an Systemen mit einem Ausgang und mehreren Eingängen von Wang und Hahn (1982) erprobt worden. Mit dem Gütekriterium

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} r_y \, y_K^2(k) + \underline{u}_{dI}^T(k) \; \underline{R}_u \; \underline{u}_{dI}(k)$$

wird dabei neben der Auslegung des Korrekturnetzwerks ein optimaler Vorkompensator nach Bild 3.11 entworfen, mit dem die Stellenergie auf die zur Verfügung stehenden Stellgrößen aufgeteilt wird. Der Kompensator wird dann im Prinzip für die erweiterte Regelstrecke, bestehend aus Vorkompensator, Integrator, Regelstrecke und Korrekturnetzwerk, mit dem Verfahren aus Kapitel 2 so entworfen, daß im störungsfreien Fall die Kompensationsbedingung

$$A_M(z^{-1}) \; e(z) \equiv 0$$

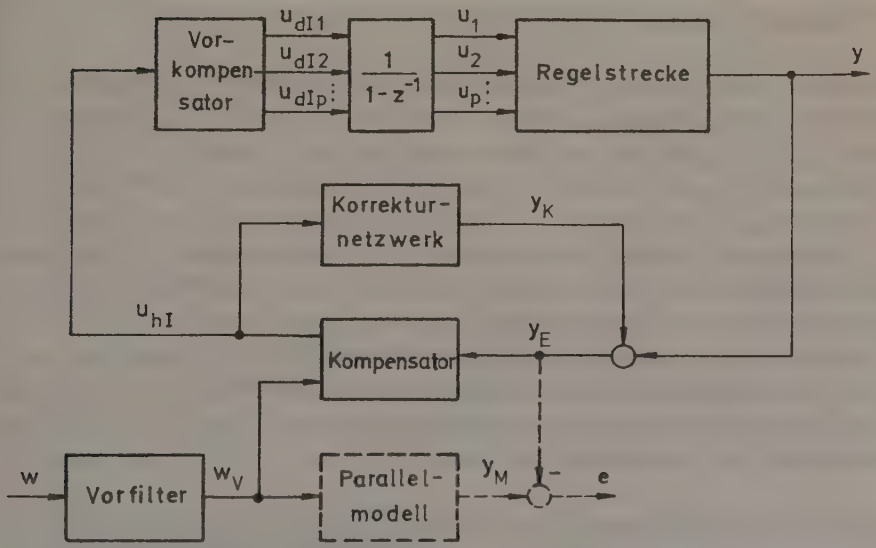



Bild 3.11. Struktur des Grundregelkreises für eine Regelstrecke mit einem Ausgang und mehreren Eingängen

entsprechend Gl.(2.46) erfüllt ist. Der Vorkompensator verteilt dabei die Stellenergie auf die einzelnen Stellgrößen optimal im Sinne des gewählten Kriteriums. In der Arbeit von Wang und Hahn wird das Optimierungsverfahren von Powell in der verbesserten Version von Brent (1973) eingesetzt. Der aktuelle Wert des Gütefunktionals wird durch digitale Simulation ermittelt. Überschreitet dieser Wert eine angegebene große Schranke, so wird dies praktisch als Divergenz des Funktionals und damit als Instabilität des Regelungssystems interpretiert. Es zeigt sich, daß die Parameteroptimierung bei stabilen Regelstrecken schnell zu brauchbaren Ergebnissen führt. Bei instabilen Regelstrecken dauert die Optimierung im allgemeinen länger, und es ist nicht garantiert, daß überhaupt eine Lösung gefunden wird. Die Optimierung wird wesentlich vereinfacht, wenn als Startwerte bereits solche Parameter für das Korrekturnetzwerk und - in diesem speziellen Fall - für den Vorkompensator eingesetzt werden, für die der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist. Sinnvoll ist es, die Parameteroptimierung für das Störverhalten durchzuführen, da bei festliegendem Störverhalten durch die Dimensionierung des Vorfilters das Führungsverhalten noch in weiten Grenzen eingestellt werden kann.

Das bisher beschriebene Verfahren kann als gemischte Polvorgabe und Parameteroptimierung interpretiert werden. Durch die Polynommatrix $\underline{A}_M(z^{-1})$ wird der Teil der Pole des geschlossenen Kreises, der durch Gl.(3.27c) bestimmt ist, direkt vorgegeben. Jener Teil, der durch Gl.(3.27a) und Gl.(3.27b) beschrieben wird, wird durch die Optimierung gesucht. Selbstverständlich ist es auch möglich, das Parallelmodell mit in die Optimierung einzubeziehen. Als Nebenbedingung ist dann jedoch darauf zu achten, daß die Stabilitätsbedingungen Gl.(2.38b), Gl.(3.3b) und Gl.(3.7) erfüllt werden. Außer dem Parallelmodell kann natürlich auch das Vorfilter mit in die Optimierung einbezogen werden. Der Rechenaufwand für die Optimierung ist dann allerdings beträchtlich.

Das quadratische Gütekriterium nach Gl.(3.130) bietet zwar den Vorteil, daß seine Minimierung im allgemeinen unproblematisch ist

und relativ wenig Rechenaufwand erfordert, aber es hat den Nachteil, daß nicht direkt Zielgrößen des Entwurfs, wie z. B. maximales Überschwingen, Anstiegszeit, maximaler Stellaufwand usw. vorgegeben werden können. Diese sind nur durch Verändern der Bewertungsmatrix $\underline{R}$ nach Gl.(3.127) indirekt beeinflußbar. Für die direkte Vorgabe von beliebigen Zielgrößen ist das Verfahren von Kreisselmeier und Steinhauser (1979) ausgelegt. Die Anwendung dieses Verfahrens auf die Reglerstruktur nach Bild 3.2 bzw. Bild 3.3 ist allerdings bisher noch nicht erfolgt.

## 3.6. Zusammenfassung

Mit Hilfe des Korrekturnetzwerks, das ein lineares Mehrgrößenfilter für eine zusätzliche Rückkopplung der Stellgrößen (bzw. von den Stellgrößen abgeleiteten Hilfssignalen) darstellt, kann der grundsätzliche Entwurfsgedanke des Kompensators nach Kapitel 2 auch für eine Klasse von Regelstrecken erweitert werden, die nicht entkoppelbar sind oder eine instabile Inverse besitzen. Das Stabilitätsproblem wird dabei in den Entwurf des Parallelmodells und den Entwurf des Korrekturnetzwerks separiert. Das Korrekturnetzwerk muß stabil sein und zusammen mit der Regelstrecke Gl.(3.7) erfüllen. Der Entwurf kann im Frequenzbereich sequentiell mit Hilfe von Eingrößenmethoden durchgeführt werden. Der Frequenzbereich gestattet darüber hinaus einen guten systemtheoretischen Einblick in das Verfahren. Es zeigt sich, daß für stabile Regelstrecken stets ein stabiles Korrekturnetzwerk existiert, so daß für den hier betrachteten Regler der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist. Es ergibt sich aber auch, daß bei instabilen Regelstrecken in bestimmten Fällen eine Stabilisierung des Regelkreises mit einem stabilen Korrekturnetzwerk nicht möglich ist. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn bei einem Eingrößensystem eine nichtminimalphasige Nullstelle zwischen zwei instabilen Polen auf der reellen Achse entweder links oder rechts des Einheitskreises liegt.

Der Entwurf des Korrekturnetzwerks mit Hilfe von Parameteroptimierungsstrategien gestattet es, weitergehende Anforderungen an das

dynamische Verhalten des Regelkreises zu berücksichtigen. Dazu wird ein quadratisches Gütekriterium vorgeschlagen. Dieses hat den Vorteil, daß es mit relativ wenig Rechenaufwand minimiert werden kann. Ferner sind bei stabil vorgegebenem Parallelmodell die Stabilitätsbedingungen nach Gl.(3.3b) und Gl.(3.7) für den Regler mit einfachem I-Verhalten automatisch erfüllt. Es hat allerdings den Nachteil, daß durch die Wahl der Bewertungsmatrizen das dynamische Verhalten der Stell- und Regelgrößen zwar beeinflußt, nicht aber direkt definiert vorgegeben werden kann.

Das Korrekturnetzwerk bewirkt, daß die Regelgrößen nicht mehr exakt den Ausgangsgrößen $\underline{y}_M$ des Parallelmodells folgen. Es verhindert somit eine direkte Kompensation der Regelstrecke, die nur unter den Voraussetzungen V2.2 und V2.3 zu einer stabilen Regelung führt. Stationäre Genauigkeit und damit statische Entkopplung kann leicht durch die Einführung freier Integratoren berücksichtigt werden. Mit dem Korrekturnetzwerk kann effektiv das Stellverhalten beeinflußt werden, da die Pole, durch die das dynamische Verhalten der Stellgrößen bestimmt wird, durch Gl.(3.7) festliegen. Will man bei Verwendung eines Korrekturnetzwerks durch ein entsprechendes Vorfilter entkoppelndes Führungsverhalten erreichen, so ist dies nur für jene Klasse von Regelstrecken möglich, die auch ohne Korrekturnetzwerk mit dem Regler aus Kapitel 2 zu stabilisieren ist, d. h. die die Voraussetzungen V2.2 und V2.3 erfüllt.

# 4. Der adaptive Regelkreis für eine Mehrgrössen-Regelstrecke mit unbekannten Parametern

## 4.1. Einführung und Problemstellung

In diesem Abschnitt soll der in Kapitel 3 entworfene Regler als adaptiver Regler ausgelegt werden. Es wird angenommen, daß die Parameter der Regelstrecke, d. h. die Koeffizienten der in den Matrizen $\underline{A}(z^{-1})$ und $\underline{B}(z^{-1})$ nach Gl.(2.21) zusammengefaßten Polynome, unbekannt sind. Dasselbe gelte auch für die Störpolynommatrix $\underline{C}(z^{-1})$. Hingegen wird für die theoretischen Ableitungen vorausgesetzt, daß die Grade $n(A_i)$ und $n(B_{ij})$ sowie die Schrittverzögerungen $d_{ij}$ für alle $i,j \in \{1,\ldots,q\}$ bekannt sind. Dann sind auch die Verzögerungsmatrizen $\underline{D}_a(z^{-1})$ und $\underline{D}_e(z^{-1})$ und die maximale Eingangsschrittverzögerung $\overline{d}_e$ nach Gl.(2.38c) bestimmt.

Das Problem, das durch den adaptiven Regler gelöst werden soll, läßt sich mit der in Bild 4.1 dargestellten Struktur so formulieren:

> Die (von den unbekannten Streckenparametern abhängenden) Reglerparameter des Kompensators sollen mit Hilfe eines geeigneten Adaptionsalgorithmus so eingestellt werden, daß die Ausgangsgrößen $\underline{y}_E$ der erweiterten Regelstrecke zumindest asymptotisch den Ausgangsgrößen $\underline{y}_M$ exakt folgen und alle im Regelkreis auftretenden Signale beschränkt bleiben. Für die Einstellung der Reglerparameter dürfen dabei nur die meßbaren Ein- und Ausgangssignale der Regelstrecke und daraus berechenbare Signale verwendet werden.

Der in Bild 4.1 angedeutete Grundregelkreis ist mit der Struktur in Bild 3.1 identisch. Der Gesamtregler besteht aus dem festeingestellten Korrekturnetzwerk und dem adaptiv einzustellenden Kompensator. Durch die überlagerte Einstellung der Parameter des Kompensators wird das gesamte adaptive Regelungssystem hochgradig nichtlinear. Wie in Bild 4.1 zu erkennen ist, stellt die Adaption

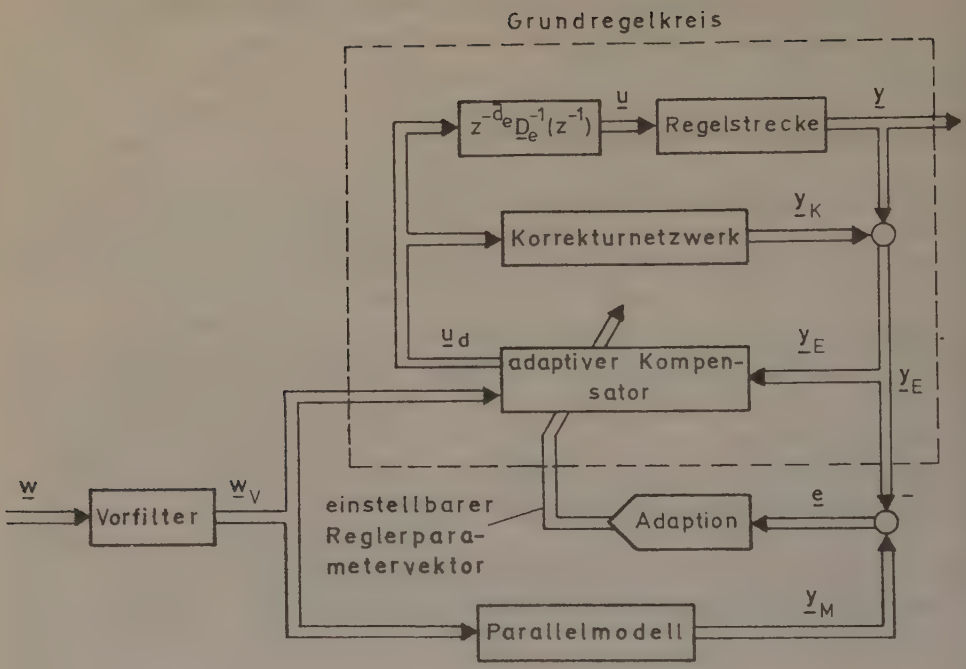



Bild 4.1. Grundstruktur der adaptiven Regelung

eine zusätzliche nichtlineare Rückkopplung dar. Damit hängt aber die Stabilität des gesamten Regelungssystems von dem gewählten Adaptionsgesetz ab. Die zuvor formulierte Problemstellung für die adaptive Regelung kann auch als folgendes Stabilitätsproblem aufgefaßt werden:

Für die Parameter des (adaptiven) Kompensators wird ein Einstellgesetz gesucht, so daß unabhängig von den (unbekannten) Parametern der Regelstrecke

1. die Konvergenz des natürlichen Fehlervektors
   $\underline{e}(z) = \underline{y}_M(z) - \underline{y}_E(z)$ mit $\lim_{k\to\infty} \underline{e}(k) = \underline{0}$ gesichert ist und

2. alle im Regelkreis auftretenden Signale beschränkt sind.

Für die Lösung dieser Stabilitätsaufgabe wurde mit Erfolg die direkte Methode von Ljapunow (Lyapunov (1966)) und die Hyperstabilitätstheorie (Popov (1973)) angewandt. Als Beispiel für die erste Methode seien hier die Arbeiten von Parks (1966), Winsor und Roy (1968), Monopoli (1974), Ionescu und Monopoli (1977), Narendra et al. (1978, 1980) und Narendra und Lin (1980) angeführt. Beispiele für die Anwendung der Hyperstabilitätstheorie liefern die Arbeiten von Landau (1973 und 1979), Lozano und Landau (1981) und Schmid (1979). In der vorliegenden Arbeit wird die direkte Methode von Ljapunow wegen ihrer höheren Anschaulichkeit bevorzugt.

Es ist interessant, daß in den siebziger Jahren sich sämtliche Arbeiten auf den Nachweis der Konvergenz des natürlichen Fehlers konzentrierten und über die Beschränktheit der Signale im Grundregelkreis gewisse "Plausibilitätsannahmen" machten. Erst Narendra et al. (1980) und Landau (1980) gelang der theoretische Nachweis der Beschränktheit aller im Regelkreis auftretenden Signale. In der vorliegenden Arbeit wird diese im Abschnitt 4.2 auf anderem Wege als in den bereits zitierten Arbeiten ebenfalls nachgewiesen.

Für adaptive Regelungen kann aufgrund der Komplexität des nichtlinearen Regelungssystems die Konvergenz des natürlichen Fehlers im allgemeinen nur für den störungsfreien Fall theoretisch garantiert werden. Glücklicherweise zeigte sich in ausführlichen Simulationen, daß solche Verfahren "robust" gegenüber Störungen in dem Sinne sind, daß die Stabilität des Gesamtsystems erhalten bleibt (vgl. z. B. Hahn (1978), Klein (1978), Schmid (1979)). Ein früher Lösungsversuch, die Stabilität des gesamten nichtlinearen Regelungssystems auch im gestörten Fall theoretisch zu garantieren, ist von Narendra et al. (1971) unternommen worden. In neuerer Zeit beschäftigen sich die Arbeiten von Sebakhy und Salama (1982), Peterson und Narendra (1982) und Kreisselmeier und Narendra (1982) mit diesem Problem. Diese Arbeiten behandeln die Störungen eher von einem deterministischen Standpunkt aus. Über die Konvergenzeigenschaften adaptiver Regelungen unter stochastischen Störungen gewinnen z. B. Goodwin et al (1981) und Landau (1982) mit Hilfe des Martingale-Theorems theoretische Aussagen. In Abschnitt 4.4 werden die Konzepte einiger der erwähnten Arbeiten diskutiert und mit einem eigenen Beitrag verglichen.

## 4.2. Entwurf eines garantiert stabilen adaptiven Mehrgrößenreglers

Betrachtet wird das Stellgesetz für den Regler mit Korrekturnetzwerk und explizitem $(n_z+1)$-fachen I-Verhalten nach Gl.(3.36) und Gl.(3.37). Das Stellgesetz für den Regler ohne explizites I-Verhalten nach Gln.(3.18) und (2.61b) ist in den Gleichungen (3.36) und (3.37) mathematisch formal als Spezialfall für $n_z = -1$ enthalten.

Gl.(3.37) ist von den Parametern der Regelstrecke unabhängig und bleibt daher auch im adaptiven Fall unverändert erhalten. Der Adaptionsalgorithmus beeinflußt aber die Berechnung des Hilfssignalvektors $\underline{u}_{dI}$ nach Gl.(3.36), die von den Streckenparametern abhängt.

Definiert man den qx1 Signalvektor

$$\underline{\mu}(z) = \underline{B}_M(z^{-1})\ \underline{w}_V(z) + [-\underline{B}'^{*}_K(z^{-1}) + \underline{R}_K(z^{-1})\ \underline{B}'_K(z^{-1})]\ z^{-1}\ \underline{u}_{dI}(z) + \underline{S}_K(z^{-1})\ \underline{y}_K(z), \tag{4.1}$$

der nur mit Hilfe der bekannten Parameter des Korrekturnetzwerkes und des Parallelmodells synthetisiert wird (vgl. Gl.(3.12)) und die Polynommatrix

$$\underline{E}(z^{-1}) = -\underline{B}^{*}(z^{-1}) + \underline{R}_I(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1} = \{E_{ij}(z^{-1})\};\ i,j = 1, \ldots, q\ , \tag{4.2}$$

dann kann Gl.(3.36) in der Form

$$(\underline{B}_O + \underline{B}'_{KO})\ \underline{u}_{dI}(z) = \underline{\mu}(z) + \underline{E}(z^{-1})\ z^{-1}\ \underline{u}_{dI}(z) + \underline{S}_I(z^{-1})\ \underline{y}(z) \tag{4.3}$$

geschrieben werden. Bei unbekannten Parametern der Regelstrecke sind in dieser Gleichung die Elemente $b_{ijO}$ der Matrix

$$\underline{B}_O = \{b_{ijO}\};\ i,j = 1, \ldots, q\ , \tag{4.4}$$

die Koeffizienten der Polynome

$$E_{ij}(z^{-1}) = \sum_{l=O}^{n(E_{ij})} e_{ijl}\, z^{-l};\ i,j = 1, \ldots, q, \tag{4.5}$$

die in der Matrix $\underline{E}(z^{-1})$ zusammengefaßt sind, und die Koeffizienten der Polynome

$$S_{Ii}(z^{-1}) = \sum_{l=O}^{n(S_{Ii})} s_{Ii,l}\, z^{-l};\ i = 1, \ldots, q \tag{4.6}$$

- das sind die (von Null verschiedenen) Elemente der Diagonalmatrix $\underline{S}_I(z^{-1})$, vgl. Gl.(2.92), Abschnitt 2.3.2.1 - nicht bekannt und werden durch entsprechende Schätzwerte ersetzt.

Um den Adaptionsalgorithmus formal einfacher beschreiben zu können, ist es günstig, Gl.(4.3) in einer etwas kompakteren Form zu formulieren. Dazu werden für jedes $i \in \{1, \ldots, q\}$ die Koeffizienten $e_{ijl}$ der Polynome $E_{ij}(z^{-1})$ und die Koeffizienten $s_{Ii,l}$ der Polynome $S_{Ii}(z^{-1})$ in einem Parametervektor

$$\begin{aligned}\underline{p}_i^T = [&e_{i1O}, e_{i11}, \ldots, e_{i1,n(E_{i1})}\\ &e_{i2O}, e_{i21}, \ldots, e_{i2,n(E_{i2})}\\ &\vdots\\ &e_{iqO}, e_{iq1}, \ldots, e_{iq,n(E_{iq})}\\ &s_{IiO}, s_{Ii1}, \ldots, s_{Ii,n(S_{Ii})}];\\ &i = 1, \ldots, q\end{aligned} \tag{4.7}$$

mit der Dimension

$$\dim(\underline{\bar{p}}_i) = q + 1 + n(S_{Ii}) + \sum_{j=1}^{q} n(E_{ij}); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.8}$$

zusammengefaßt. Mit diesen Vektoren kann nun wiederum die Parametermatrix

$$\underline{\bar{P}} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{p}}_1^T & \underline{o}^T & & \\ \underline{o}^T & \underline{\bar{p}}_2^T & \underline{o}^T & \\ \underline{o}^T & \underline{\bar{p}}_3^T & \underline{o}^T & \\ \vdots & & & \\ \underline{o}^T & & & \underline{\bar{p}}_q^T \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

aufgebaut werden. Außer den Nullelementen enthält diese Matrix in der i-ten Zeile nur den Vektor $\underline{\bar{p}}_i^T$. Aufgrund der unterschiedlichen Grade $n(E_{ij})$ und $n(S_{Ii})$ haben diese Vektoren im allgemeinen unterschiedliche Dimension. Bildet man nun die Signalvektoren

$$\begin{aligned} \underline{\bar{x}}_i^T(k) = [&u_{dI1}(k-1), u_{dI1}(k-2), \ldots, u_{dI1}(k-n(E_{i1})-1) \\ &u_{dI2}(k-2), u_{dI2}(k-2), \ldots, u_{dI2}(k-n(E_{i2})-1) \\ &\vdots \\ &u_{dIq}(k-1), u_{dIq}(k-2), \ldots, u_{dIq}(k-n(E_{iq})-1) \\ &y_i(k), y_i(k-1), \ldots, y_i(k-n(S_{Ii}))]; \\ & \qquad\qquad i = 1, \ldots, q \end{aligned} \tag{4.10}$$

mit

$$\dim(\underline{\bar{x}}_i) = \dim(\underline{\bar{p}}_i); \; i = 1, \ldots, q \tag{4.11}$$

und

$$\bar{\underline{x}}(k) = \begin{bmatrix} \bar{\underline{x}}_1(k) \\ \bar{\underline{x}}_2(k) \\ \vdots \\ \bar{\underline{x}}_q(k) \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

so erhält man aus Gl.(4.3) im Zeitbereich die Beziehung

$$(\underline{B}_O + \underline{B}'_{KO})\ \underline{u}_{dI}(k) = \underline{\mu}(k) + \bar{\underline{P}}\ \bar{\underline{x}}(k). \tag{4.13}$$

Ersetzt man in Gl.(4.13) die unbekannten Matrizen $\underline{B}_O$ und $\bar{\underline{P}}$ durch ihre Schätzwerte $\hat{\underline{B}}_O(k-1)$ und $\hat{\bar{\underline{P}}}(k-1)$, so erhält man für den adaptiven Regler das implizite Stellgesetz

$$(\hat{\underline{B}}_O(k-1) + \underline{B}'_{KO})\ \underline{u}_{dI}(k) = \underline{\mu}(k) + \hat{\bar{\underline{P}}}(k-1)\ \bar{\underline{x}}(k). \tag{4.14}$$

Dabei wird die Matrix $\hat{\bar{\underline{P}}}(k)$ mit der gleichen Struktur wie die Matrix $\bar{\underline{P}}$ angesetzt; es gilt

$$\hat{\bar{\underline{P}}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\underline{p}}_1^T(k) & \underline{0}^T & \\ \underline{0}^T & \hat{\underline{p}}_2^T(k) & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \hat{\underline{p}}_3^T(k) & \underline{0}^T \\ \vdots & & \\ \underline{0}^T & & \hat{\underline{p}}_q^T(k) \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

mit

$$\dim(\hat{\underline{p}}_i) = \dim(\bar{\underline{p}}_i);\quad i = 1, \ldots, q. \tag{4.16}$$

In dem impliziten Stellgesetz Gl.(4.14) werden die Schätzwerte, die bereits zum Zeitpunkt k-1 vorliegen, benutzt. Der Grund hierfür wird im Abschnitt 4.6 erörtert werden.

Um Mißverständnissen vorzubeugen sei darauf hingewiesen, daß Gl. (4.13) und Gl.(4.14) verschiedene Sachverhalte beschreiben. Gl. (4.13) stellt das Stellgesetz bei bekannter Regelstrecke unter Verwendung der exakten Parameter $\underline{B}_0$ und $\overline{\underline{P}}$, die von den Streckenparametern abhängen, dar. Gl.(4.14) beschreibt das Stellgesetz für den adaptiven Regler, bei dem die unbekannten Parameter durch Schätzwerte $\hat{\underline{B}}_0$ und $\hat{\overline{\underline{P}}}$ ersetzt werden. Ein Zusammenhang zwischen beiden Stellgesetzen liegt darin, daß beim Übergang vom linearen auf den adaptiven Regler die Struktur erhalten bleibt. Der Ersatz der exakten Parameter $\underline{B}_0$ und $\overline{\underline{P}}$ durch die entsprechenden Schätzwerte hat selbstverständlich Konsequenzen auf das dynamische Verhalten des natürlichen Fehlervektors, die im folgenden erörtert werden sollen.

Dazu wird von Gl.(3.16) ausgegangen, die das dynamische Verhalten der Fehler $\underline{e}$ für den Regler mit Korrekturnetzwerk beschreibt. Entsprechend den Ausführungen aus Abschnitt 3.3.3 ist diese Gleichung bei Verwendung eines expliziten $(n_z+1)$-fachen Integrators mit der Beziehung

$$\begin{aligned}\underline{A}_M(z)\ \underline{e}(z) = z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ [&\underline{B}_M(z^{-1})\ \underline{w}_V(z)\\ &- \{(\underline{I} - \underline{R}_I(z^{-1})\ z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\\ &+ (\underline{I} - \underline{R}_K(z^{-1})\ z^{-1})\ \underline{B}'_K(z^{-1})\}\ \underline{u}_{dI}(z)\\ &+ \underline{S}_I(z^{-1})\ \underline{y}(z) + \underline{S}_K(z^{-1})\ \underline{y}_K(z)]\\ &- (\underline{I} - \underline{R}_I(z^{-1})\ z^{-1})\ (\underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}_I(z) + \underline{z}_I(z))\end{aligned} \qquad (4.17)$$

identisch [1]. Mit den Definitionen des Signalvektors $\underline{\mu}(z)$ nach Gl.

---

[1] Vgl. hierzu Gln.(2.86), (2.87a bis d), (2.92), (2.93), (3.32a) und (3.35).

(4.1), der Polynommatrix $\underline{E}(z^{-1})$ nach Gl.(4.2), der Parametermatrix $\overline{\underline{P}}$ nach Gl.(4.9) und des Signalvektors $\overline{\underline{x}}$ nach Gl.(4.12) ergibt sich aus dieser Gleichung im Zeitbereich

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\,\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\;\underline{A}_M(z^{-1})\;\underline{e}(z)\}\\
&= \underline{\mu}(k) - (\underline{B}_O + \underline{B}'_{KO})\;\underline{u}_{dI}(k) + \overline{\underline{P}}\;\overline{\underline{x}}(k)\\
&\quad + \mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\,\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\;\underline{v}(z)\},
\end{aligned} \tag{4.18}$$

wobei in dem Vektor

$$\underline{v}(z) = -(\underline{I} - \underline{R}_I(z^{-1})\;z^{-1})(\underline{C}(z^{-1})\;\underline{\varepsilon}_I(z) + \underline{z}_I(z)) \tag{4.19}$$

die Störungen zusammengefaßt sind. Addiert man auf der rechten Seite von Gl.(4.18) den nach dem Stellgesetz, Gl.(4.14), identisch verschwindenden Ausdruck

$$(\hat{\underline{B}}_O(k-1) + \underline{B}'_{KO})\;\underline{u}_{dI}(k) - \underline{\mu}(k) - \hat{\overline{\underline{P}}}(k-1)\;\overline{\underline{x}}(k) \equiv 0,$$

so erhält man für den mit der Nennerpolynommatrix des Parallelmodells gefilterten Fehler

$$\underline{e}_M(z) = \underline{A}_M(z^{-1})\;\underline{e}(z) \tag{4.20}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\,\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\;\underline{e}_M(z)\} =\\
&= -(\underline{B}_O - \hat{\underline{B}}_O(k-1))\;\underline{u}_{dI}(k) + (\overline{\underline{P}} - \hat{\overline{\underline{P}}}(k-1))\;\overline{\underline{x}}(k)\\
&\quad + \mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\,\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\;\underline{v}(z)\}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Definiert man nun die (erweiterten) Parametervektoren

$$\underline{p}_i^T = (b_{i1O},\, b_{i2O},\, \ldots,\, b_{iqO},\, \overline{\underline{p}}_i^T);\; i = 1, \ldots, q \tag{4.22}$$

bzw. deren Schätzwerte

$$\hat{\underline{p}}_i^T(k) = (\hat{b}_{i1O}(k), \ldots, \hat{b}_{iqO}(k), \hat{\bar{\underline{p}}}_i^T(k)); \; i = 1, \ldots, q \quad (4.23)$$

und die (erweiterten) Signalvektoren

$$\underline{x}_i^T(k) = (-\underline{u}_{dI}^T(k), \bar{\underline{x}}_i^T(k)); \; i = 1, \ldots, q, \quad (4.24)$$

wobei gilt

$$\dim(\underline{p}_i) = \dim(\hat{\underline{p}}_i) = \dim(\underline{x}_i)$$

$$= 2q + 1 + n(S_{Ii}) + \sum_{j=1}^{q} n(E_{ij}); \; i = 1, \ldots, q, \quad (4.25)$$

so folgt aus Gl.(4.21) unter Berücksichtigung der Struktur der Matrizen $\bar{\underline{P}}$ nach Gl.(4.9) und $\hat{\bar{\underline{P}}}(k)$ nach Gl.(4.15) für jede Komponente $e_{Mi}$ des gefilterten Fehlervektors $\underline{e}_M$

$$e_{Mi}(k) = [\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k - \bar{d}_e - d_i^a - 1)]^T \underline{x}_i(k - \bar{d}_e - d_i^a)$$

$$+ v_i(k); \; i = 1, \ldots, q \; . \quad (4.26)$$

Gl.(4.26) beschreibt für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ ein Eingrößenschätzproblem der folgenden Art:

Für die Parameter $\hat{\underline{p}}_i$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$) des Reglers wird ein Einstellgesetz

$$\hat{\underline{p}}_i(k) = \underline{f}_i(e_{Mi}(l), \underline{x}_i(l); \; l \leq k); \; i = 1, \ldots, q \quad (4.27)$$

gesucht, so daß die Konvergenz der gefilterten Fehlersignale

$$\lim_{k \to \infty} e_{Mi}(k) = 0; \quad i = 1, \ldots, q \quad (4.28)$$

garantiert ist.

Aus der Konvergenz der gefilterten Fehler folgt entsprechend Gl. (4.20) auch die Konvergenz der natürlichen Fehler, da die Diagonalmatrix $\underline{A}_M(z^{-1})$ entsprechend der Voraussetzung nach Gl.(2.38b) nur Hurwitzpolynome enthält.

Es ist klar, daß für stochastisch gestörte Systeme Gl.(4.28) in dieser Form nicht erfüllt werden kann, sondern durch die Forderung

$$\lim_{k\to\infty} E\{e_{Mi}(k)\} = 0; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.29}$$

ersetzt werden muß.

Das durch Gl.(4.26) definierte Schätzproblem ist in der Literatur vielfach studiert worden. Die heute verfügbaren Algorithmen zur Lösung dieses Problems lassen sich in drei Hauptklassen einteilen:

1. Least-squares-Verfahren (Åström und Wittenmark (1973), Koivo (1980), Lozano und Landau (1981), Nöth (1982)),

2. Verfahren der stochastischen Approximation (Goodwin et al. (1981)),

3. sogenannte "fixed gain"-Verfahren (Kudva und Narendra (1974), Ionescu und Monopoli (1977), Schmid (1979)).

In dieser Arbeit wird ein Algorithmus der "verallgemeinerten stochastischen Approximation" vorgeschlagen, der eine Verallgemeinerung des von Goodwin et al. (1981) analysierten Verfahrens ist. Dazu wird folgendes Theorem betrachtet:

Satz 4.1. Gegeben sei das diskrete dynamische System

$$\bar{e}(k) = [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-1)]^T \underline{x}(k-\delta) \tag{4.30}$$

$$\hat{\underline{p}}(k) = \hat{\underline{p}}(k-1) + r(k)\, \underline{G}\, \underline{x}(k-\delta)\, \bar{e}(k) \tag{4.31}$$

$$\frac{1}{r(k)} = \frac{\lambda_1(k)}{r(k-1)} + \lambda_2(k)\, \underline{x}^T(k-\delta)\, \underline{G}\, \underline{x}(k-\delta) + \lambda_3(k) \tag{4.32}$$

mit

$$\underline{G} = \underline{G}^T > 0, \quad r(-1) > 0 \tag{4.33}$$

$$0 \leq \lambda_1(k) \leq \overline{\lambda}_1 \tag{4.34a}$$

$$\frac{1}{2} < \lambda_2(k) \leq \overline{\lambda}_2 \tag{4.34b}$$

$$0 \leq \lambda_3(k) \leq \overline{\lambda}_3, \tag{4.34c}$$

wobei $\delta$ eine beliebige (ganze) Zahl ist. Dann gilt für beliebige (konstante) Vektoren $\underline{p}$ und beliebige Anfangswerte von $\hat{\underline{p}}$ und $\underline{x}$:

$$\lim_{k\to\infty} r(k)\, \bar{e}^2(k) = 0 \tag{4.35}$$

$$\lim_{k\to\infty} \hat{\underline{p}}(k) = \underline{p}^* = \text{const} \tag{4.36}$$

$$[\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)]^T\, \underline{G}^{-1} [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)] \leq [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-1)]^T\, \underline{G}^{-1} [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-1)] \tag{4.37}$$

$$[\underline{p} - \underline{p}^*]^T\, \underline{G}^{-1} [\underline{p} - \underline{p}^*] \leq [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(0)]^T\, \underline{G}^{-1} [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(0)] \tag{4.38}$$

Werden $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ und $\lambda_3(k)$ zusätzlich so gewählt, daß für alle k

$$\frac{1}{\rho \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta) + \gamma} \leq r(k) < \frac{2}{\underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \tag{4.39}$$

für ein $\rho$ mit

$$\rho > \frac{1}{2} \tag{4.40a}$$

und ein $\gamma$ mit

$$\gamma \geq 0 \tag{4.40b}$$

ist und existieren positive Konstanten $C_0$ und $C_1$ derart, daß

$$\|\underline{x}(k)\| \leq C_0 + C_1 \sup_{1\leq k} \|e'(1+\delta)\| \tag{4.41}$$

mit

$$e'(k) = [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-\nu_1)]^T \underline{x}(k-\delta) \qquad (4.42)$$

für eine (ganzzahlige) Konstante $\nu_1$ ist, so folgt außerdem

$$\|\underline{x}(k)\| \leq M_x < \infty \text{ für alle } k \qquad (4.43)$$

und

$$\lim_{k\to\infty} [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-\nu)]^T \underline{x}(k-\delta) = 0 \text{ für alle ganzzahligen } \nu . \qquad (4.44)$$

Der Beweis dieses Theorems befindet sich in Anhang A6.1. Die Bedingung nach Gl.(4.41) kann jederzeit entsprechend Gl.(4.32) durch die Wahl

$$\lambda_1(k) = 0, \quad \lambda_2(k) = \rho, \quad \lambda_3(k) = \gamma$$

erfüllt werden. Da $\lambda_2(k)$ nach Gl.(4.35) immer größer als 1/2 und $\lambda_3(k)$ nach Gl.(4.36) größer oder gleich Null sein müssen, folgt hieraus, daß auch $\rho$ größer als 1/2 und $\gamma$ größer oder gleich Null sein müssen.

Die Gleichung für das dynamische Verhalten der gefilterten Fehler $e_{Mi}$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$), Gl.(4.26), ist mit $\bar{d}_e + d_i^a = \delta$ im störungsfreien Fall ($v_i(k) \equiv 0$) sehr ähnlich zu Gl.(4.30) aufgebaut. Der entscheidende Unterschied besteht darin, daß in Gl.(4.26) die Schätzwerte $\hat{\underline{p}}_i(k - \bar{d}_e - d_i^a - 1)$ und nicht $\hat{\underline{p}}_i(k-1)$ wie in Gl.(4.30) auftauchen. Formale Gleichheit erzielt man daher durch Addition der Signale

$$h_i(k) = [\hat{\underline{p}}_i(k - \bar{d}_e - d_i^a - 1) - \hat{\underline{p}}_i(k-1)]^T \underline{x}_i(k - \bar{d}_e - d_i^a);$$

$$i = 1, \ldots, q \qquad (4.45)$$

auf beiden Seiten von Gl.(4.26). Man erhält dann

$$\bar{e}_i(k) = e_{Mi}(k) + h_i(k); \quad i = 1, \ldots, q \qquad (4.46)$$

bzw.

$$\bar{e}_i(k) = [\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k-1)]^T \underline{x}_i(k - \bar{d}_e - d_i^a) + v_i(k);$$

$$i = 1, \ldots, q . \qquad (4.47)$$

Die Signale $\bar{e}_i$ heißen "vermehrte" Fehler. Durch Anwendung von Satz 4.1, Gln.(4.31) bis (4.36) und Gln.(4.41) und (4.42), erhält man für die Reglerparameter $\hat{p}_i$ folgenden Adaptionsalgorithmus:

$$\hat{p}_i(k) = \hat{p}_i(k-1) + r_i(k)\ \underline{G}_i\ \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)\ \bar{e}_i(k); \qquad i=1,\ldots,q \tag{4.48}$$

$$\frac{1}{r_i^*(k)} = \frac{\lambda_{1i}(k)}{r_i(k-1)} + \lambda_{2i}(k)\ \underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\ \underline{G}_i\ \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)+\lambda_{3i}(k); \qquad i=1,\ldots,q \tag{4.49}$$

mit

$$\underline{G}_i = \underline{G}_i^T > 0; \quad r_i(-1) > 0; \quad i=1,\ldots,q \tag{4.50}$$

$$0 \leq \lambda_{1i}(k) \leq \bar{\lambda}_{1i}; \quad i=1,\ldots,q \tag{4.51}$$

$$\frac{1}{2} < \lambda_{2i}(k) \leq \bar{\lambda}_{2i}; \quad i=1,\ldots,q \tag{4.52}$$

$$0 \leq \lambda_{3i}(k) \leq \bar{\lambda}_{3i}; \quad i=1,\ldots,q \tag{4.53}$$

$$r_i(k) \begin{cases} = r_i^*(k) \text{ falls } r_i^*(k) \geq \dfrac{1}{\rho_i\ \underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\ \underline{G}_i\ \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)+\gamma_i} \\ = \dfrac{1}{\rho_i\ \underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\ \underline{G}_i\ \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)+\gamma_i} \text{ sonst} \end{cases} \qquad i=1,\ldots,q \tag{4.54}$$

$$\rho_i > \frac{1}{2}; \quad i=1,\ldots,q \tag{4.55a}$$

$$\gamma_i \geq 0; \quad i=1,\ldots,q \tag{4.55b}$$

Die positiv definiten Bewertungsmatrizen $\underline{G}_i$, die positiven Anfangswerte $r_i(-1)$, die zeitvarianten Gewichtungsfaktoren $\lambda_{1i}(k)$, $\lambda_{2i}(k)$ und $\lambda_{3i}(k)$ und die Größen $\rho_i$ und $\gamma_i$ sind unter den Einschränkungen von Gln.(4.50) bis (4.53) und Gl.(4.55a,b) frei wählbar. Die Gleichungen (4.50) bis (4.53) legen für die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{1i}(k)$,

$\lambda_{2i}(k)$ und $\lambda_{3i}(k)$ eine untere und beliebige obere Schranke fest, so daß eine Divergenz dieser Faktoren ausgeschlossen wird. Da nach Gl.(4.49) und Gln.(4.50) bis (4.53)

$$0 \leq r_i^*(k) \leq \frac{1}{\lambda_{2i}(k)\ \underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\ \underline{G}_i\ \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) + \lambda_{3i}(k)}$$

$$i = 1, \ldots, q$$

für alle k ist, ist die Bedingung

$$r_i^*(k) \geq \frac{1}{\rho_i\ \underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\ \underline{G}_i\ \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) + \gamma_i}$$

$$i = 1, \ldots, q$$

nach Gl.(4.54) überhaupt nur dann sinnvoll, falls die Konstanten $\rho_i$ und $\gamma_i$ nach den Ungleichungen

$$\rho_i \gg \bar{\lambda}_{2i} \text{ und } \gamma_i \gg \bar{\lambda}_{3i};\quad i = 1, \ldots, q$$

gewählt werden. Man beachte, daß (für positive Anfangswerte) die Faktoren $r_i(k)$ nach Gl.(4.49) und Gl.(4.54) stets positiv sind.

Die Signalvektoren $\underline{x}_i$ werden nach den Gleichungen (4.24) und (4.10) aus den Hilfssignalen $\underline{u}_{dI}$ und den Regelgrößen $\underline{y}$ gebildet. Nach Satz 4.1, Gl.(4.36), konvergiert der adaptive Regler mit den Einstellwerten $\hat{\underline{p}}_i$ gegen einen linearen Regler mit den Parametern $\underline{p}_i^*$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$), und die Einstellwerte $\hat{\underline{p}}_i$ sind entsprechend Gl.(4.37) für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ beschränkt. Dies gilt unabhängig von der Beschränktheit der Signalvektoren $\underline{x}_i$, da zum Beweis von Gln.(4.38) und (4.39) aus Satz 4.1 nach Anhang A6.1 nicht die Beschränktheit des Vektors $\underline{x}(k-\delta)$ gefordert wird. Da die Parameter des adaptiven Reglers beschränkt sind, sind auch die von diesen Parametern abhängigen zeitvarianten Eigenwerte des geschlossenen adaptiven (Grund)-Regelkreises (vgl. Bild 4.1) beschränkt. Dann kann man aber immer einen linearen zeitinvarianten Regler mit derselben Struktur (des adaptiven Reglers) und den

*konstanten* Parametern $\{\tilde{p}_1^T, \tilde{p}_2^T, \tilde{p}_3^T, \ldots, \tilde{p}_q^T\}$ finden, so daß die Signale $\underline{\tilde{x}}_i$ des sich ergebenden linearen zeitinvarianten Regelkreises bei gleichen Anfangswerten wie die Signale $\underline{x}_i$ des adaptiven Regelkreises die Bedingung

$$|\underline{\tilde{x}}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)| \geq |\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)|; \quad i=1,\ldots,q$$

für alle Zeiten k erfüllen. Einen solchen linearen Regler erhält man z. B. dadurch, daß man für den geschlossenen linearen Regelkreis alle Eigenwerte betragsmäßig größer wählt als den Betrag des sich für alle Zeiten k in Abhängigkeit der Parameter $\{\hat{p}_1^T(k), \hat{p}_2^T(k), \hat{p}_3^T(k), \ldots, \hat{p}_q^T(k)\}$ ergebenden absolut größten Eigenwertes des adaptiven Regelkreises. Da die Signale eines beliebigen linearen zeitinvarianten Regelkreises betragsmäßig höchstens exponentiell anwachsen können, existieren positive Konstanten $M_i$ und $\lambda_i$, so daß

$$|\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)| \leq |\underline{\tilde{x}}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)| \leq M_i\,\lambda_i^k; \quad i=1,\ldots,q \qquad (4.56)$$

für alle k ist. Somit können also auch die Beträge der Signale $\underline{x}_i$ höchstens exponentiell anwachsen. Dies hat wiederum zur Folge, daß im störungsfreien Fall (und im Fall beschränkter Störungen) sowohl die vermehrten Fehler $\bar{e}_i$ nach Gl.(4.47) als auch die gefilterten Fehler $e_{Mi}$ nach Gl.(4.26) betragsmäßig höchstens exponentiell anwachsen können und somit nicht in endlicher Zeit divergieren. Dasselbe gilt dann auch entsprechend Gl.(4.20) bei stabilem Parallelmodell für die natürlichen Fehler $e_i$. Damit die gefilterten und vermehrten Fehler $e_{Mi}$ und $\bar{e}_i$ für $i \in \{1,\ldots,q\}$ im störungsfreien Fall ($v_i(k) \equiv 0$) gegen Null konvergieren, müssen die Signalvektoren $\underline{x}_i$ eine Bedingung entsprechend Gln.(4.41) und (4.42) aus Satz 4.1 erfüllen. Dies ist die Aussage von

Satz 4.2. Sind das Parallelmodell und das Korrekturnetzwerk asymptotisch stabil und ist Gl.(3.7) erfüllt, so existieren positive Konstanten $C_0$ und $C_1$ derart, daß

der Gesamtsignalvektor

$$\underline{x}^T(k) = (\underline{x}_1^T(k), \underline{x}_2^T(k), \ldots, \underline{x}_q^T(k)) \tag{4.57a}$$

der Bedingung

$$\|\underline{x}(k)\| \leq c_0 + c_1 \sup_{1 \leq k} \|\underline{e}_{MD}(1)\| \tag{4.57b}$$

mit

$$\underline{e}_{MD}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\, \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\, \underline{e}_M(z)\} \tag{4.57c}$$

genügt. Dann sind die Signalvektoren $\underline{x}_i$ im störungsfreien Fall ($v_i(k) \equiv 0$) beschränkt, und sowohl die vermehrten Fehler $\bar{e}_i$ als auch die gefilterten Fehler $e_{Mi}$ konvergieren mit

$$\lim_{k\to\infty} \bar{e}_i(k) = \lim_{k\to\infty} [p_i - \hat{p}_i(k-1)]^T\, \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)$$

$$= 0 \; ; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.58a}$$

bzw.

$$\lim_{k\to\infty} e_{Mi}(k) = \lim_{\to\infty} [p_i - \hat{p}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a-1)]^T\, \underline{x}_i(k-d_e-d_i^a)$$

$$= 0 \; ; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.58b}$$

gegen Null.

Der Beweis von Satz 4.2 befindet sich in Anhang A6.2.

Bei stabilem Parallelmodell ergibt sich aus Gl.(4.20) und Gl. (4.58b) im störungsfreien Fall die Konvergenz der natürlichen Fehler mit

$$\lim_{k\to\infty} e_i(k) = 0 \; ; \quad i = 1, \ldots, q \,. \tag{4.59}$$

Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß die Ungleichung (4.57b) auch im gestörten System (bei beschränkten Störungen) gilt (vgl.Anhang A6.2.1). Dies ist für die Erörterung der Stabilität des gestörten Systems in Abschnitt 4.4 von Bedeutung.

Jetzt können die Bedingungen für die Beschränktheit aller im Regelkreis auftretenden Signale abgeleitet werden. Aufgrund der Beschränktheit und der Konvergenz des natürlichen Fehlervektors $\underline{e}$ nach Gl.(4.59) und der Beschränktheit des Ausgangsvektors $\underline{y}_M$ des Parallelmodells ist entsprechend Gl.(3.8) auch der Ausgangsvektor $\underline{y}_E$ der erweiterten Regelstrecke beschränkt. Wird das Korrekturnetzwerk so gewählt, daß Gl.(3.7)

$$\det [\underline{A}_K(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + \underline{A}(z^{-1})\ \underline{B}_K(z^{-1})] \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1$$

erfüllt ist, so ist der Hilfssignalvektor

$$\underline{u}_d(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{\underline{u}_{dI}(z)}{(1-z^{-1})^{n_z+1}} \right\} \quad \text{(vgl.(Gl.(3.33))}$$

entsprechend Gl.(3.5a) beschränkt. (Gl.(3.32a) gibt den Zusammenhang zwischen den Matrizen $\underline{B}_K(z^{-1})$ und $\underline{B}'_K(z^{-1})$ an.) Aus der Beschränktheit von $\underline{u}_d$ folgt bei stabilem Korrekturnetzwerk die Beschränktheit von $\underline{y}_K$. Die Beschränktheit der Regelgröße $\underline{y}$ und des Hilfssignalvektors $\underline{u}_{dI}$ folgt bereits aus der Definition der Signalvektoren $\underline{x}_i$ nach Gln.(4.10) und (4.24) und aus deren Beschränktheit nach Satz 4.2.

Damit die Signale $\underline{u}_{dI}$ nach Gl.(4.13) berechenbar sind, muß die Matrix $\hat{\underline{B}}_O(k-1) + \underline{B}'_{KO}$ in jedem Zeitpunkt k invertierbar sein. Dies kann aber z. B. durch Wahl von $\underline{B}'_{KO}$ stets erreicht werden.

Die bisher erhaltenen Ergebnisse können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

Schlußfolgerung 4.3. Unter der Voraussetzung, daß

$$\det [\hat{\underline{B}}_O(k-1) + \underline{B}'_{KO}] \neq 0 \text{ für alle } k \geq 0 \qquad (4.60)$$

und Gl.(3.7) erfüllt ist, wird bei stabilem Korrekturnetzwerk (vgl. Gl.(3.3b)) und stabilem Parallelmodell im störungsfreien Fall durch das Adaptionsgesetz nach Gln.(4.20), (4.45), (4.46) und (4.48) bis (4.55b) auch die Beschränktheit aller im Regelkreis auftretenden Signale garantiert.

Damit ist die in Abschnitt 4.1 formulierte Problemstellung für den störungsfreien Fall gelöst. Das Blockschaltbild des adaptiven Algorithmus' ist in Bild 4.2 dargestellt. Der Grundregelkreis besitzt weiterhin die Struktur nach Bild 3.3, wobei jetzt die Blöcke $\underline{S}_I(z^{-1})$, $-\underline{B}^*(z^{-1}) + \underline{R}_I(z^{-1})$ $\underline{B}(z^{-1})$ und die Matrix $\underline{B}_0$ adaptiv eingestellt werden. Bevor der Fall mit Störungen analysiert wird, soll der hier vorgestellte Algorithmus im nächsten Abschnitt noch einmal unter verschiedenen Gesichtspunkten diskutiert werden.

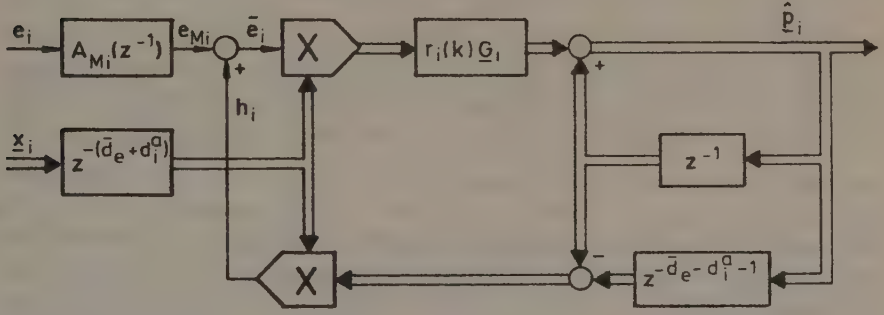



Bild 4.2. Blockschaltbild des Adaptionsalgorithmus

## 4.3. Diskussion des adaptiven Mehrgrößenreglers nach Abschnitt 4.2

### 4.3.1. Einige Bemerkungen zur Konvergenz der Reglerparameter - Das Identifikationsproblem im ungestörten System

Stimmen die geschätzten Werte $\hat{\underline{p}}_i$ der Reglerparameter mit den exakten Werten $\underline{p}_i$ für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$ überein, so sind die vermehrten Fehler $\bar{e}_i$ nach Gl.(4.47) und auch die natürlichen Fehler $e_i$ identisch Null. [1] Dieser Zustand wird als der "angepaßte Zustand" des adaptiven Reglers bezeichnet. Die Einstellung der Reglerparameter

---

[1] Alle Aussagen dieses Abschnitts beziehen sich auf das ungestörte System mit $v_i(k) \equiv 0$ für $i \in \{1,\ldots,q\}$.

$\hat{p}_i$ ist beendet, falls die vermehrten Fehler $\bar{e}_i$ Null sind. Die Frage, die sich hier stellt, lautet: Folgt aus der Konvergenz der vermehrten Fehler $\bar{e}_i$ die Konvergenz der geschätzten Reglerparameter $\hat{p}_i$ gegen den angepaßten Zustand mit den exakten Parametern $p_i$? Diese Frage, die als das "Identifikationsproblem" bezeichnet werden soll, ist schon in frühen Arbeiten untersucht und verneint worden (Kim und Lindorff (1974), Kudva und Narendra (1974) [1]), soll aber hier dennoch noch einmal systematisch untersucht werden.

Satz 4.1, Gl.(4.36), garantiert zwar, daß die Schätzwerte $\hat{p}_i$ gegen konstante Werte $p_i^*$ konvergieren, aber es ist nicht gewährleistet, daß $p_i^* = p_i$ ist. Bewegt sich nämlich der Signalvektor $x_i$ für große Zeiten $k \to \infty$ nur in der Hyperebene im $\mathbb{R}^{\dim\{x_i\}-2)}$, die senkrecht zu dem stationären Parameterfehlervektor $(p_i - p_i^*)$ steht, so konvergiert das Skalarprodukt zwischen diesem stationären Parameterfehlervektor und dem Signalvektor $x_i$ unabhängig von der Länge dieser Vektoren für $k \to \infty$ gegen Null. Dieses Skalarprodukt beschreibt nach Gl.(4.47) im störungsfreien Fall ($v_i(k) \equiv 0$ für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$) das dynamische Verhalten des vermehrten Fehlers $\bar{e}_i$ für große Zeiten. D. h. aus der Konvergenz des vermehrten Fehlers $\bar{e}_i$ gegen Null folgt nicht zwingend die Konvergenz des Parameterfehlervektors $(p_i - \hat{p}_i(k))$ gegen Null und damit nicht die Konvergenz der Reglerparameter gegen den angepaßten Zustand. Allerdings ist nach Satz 4.1, Gl.(4.37), gewährleistet, daß die Norm

$$\| p - \hat{p}_i(k) \|_{G_i^{-1}} = [p_i - \hat{p}_i(k)]^T \, G_i^{-1} [p_i - \hat{p}_i(k)]; \qquad i = 1, \ldots, q \qquad (4.61)$$

---

[1] Eine ausführliche Literaturzusammenstellung der frühen Arbeiten zu diesem Problem findet sich in Hahn (1977).

---

[2] Die Dimensionen der Signalvektoren sind nach Gl.(4.25) gleich den Dimensionen der Parametervektoren $\hat{p}_i$ und damit durch die Anzahl der zu schätzenden Parameter bestimmt.

stets monoton (aber nicht streng monoton) abnimmt, so daß auf jeden Fall

$$\|\underline{p}_i-\underline{p}_i^*\|_{\underline{G}_i^{-1}} \leq \|\underline{p}_i-\hat{\underline{p}}_i(0)\|_{\underline{G}_i^{-1}}; \quad i=1,\ldots,q \tag{4.62}$$

ist (vgl. Gl.(4.38)).

Der angesprochene Sachverhalt ist für $\dim(\underline{p}_i)=\dim(\underline{x}_i)=2$ und $\underline{G}_i=\underline{I}$ in Bild 4.3 veranschaulicht. Der stationäre Parameterfehlervektor $(\underline{p}_i-\underline{p}_i^*)$ muß nach Gl.(4.62) innerhalb des Kreises mit dem Radius $|\underline{p}_i-\hat{\underline{p}}_i(0)|$ liegen. Die Hyperebene im $\mathbb{R}^2$, auf der sich für das im Bild 4.3 dargestellte Beispiel der Vektor $\underline{x}_i$ für $k\to\infty$ bewegen kann, ergibt sich als die gestrichelte Gerade, die senkrecht auf $(\underline{p}_i-\underline{p}_i^*)$ steht.

Der Zustand, in dem die vermehrten und natürlichen Fehler $\bar{e}_i$ und $e_i$ für alle $i\in\{1,\ldots,q\}$ verschwinden, aber mindestens ein Parameterfehlervektor $(\underline{p}_i-\underline{p}_i^*)$ ungleich Null ist, soll als "näherungsweise angepaßt" bezeichnet werden. Der näherungsweise angepaßte Zustand impliziert keineswegs, daß die Differenzen zwischen *jeder* Komponente des exakten Parametervektors $\underline{p}_i$ und der entsprechenden Komponente des geschätzten Reglerparametervektors $\hat{\underline{p}}_i$ betragsmäßig klein sind bzw. ihre Beträge durch die Adaption stets abnehmen. Wie das Beispiel in Bild 4.3 zeigt, ist in diesem Fall die Differenz für die erste Komponente des stationären Parameterfehlervektors betragsmäßig noch wesentlich größer als zum Anfangszeitpunkt; es gilt in Bild 4.3

$$\lim_{k\to\infty} |p_{i1}-\hat{p}_{i1}(k)| = |p_{i1}-p_{i1}^*| > |p_{i1}-\hat{p}_{i1}(0)|.$$

Das hier angesprochene Identifikationsproblem ist keine spezielle Eigenart des im Abschnitt 4.2 vorgestellten Regelkonzepts. Es ist vielmehr allen Identifikations- und damit auch Adaptionsverfahren gemein, die ein unbekanntes System nur mit Hilfe von Ein- und Ausgangssignalen identifizieren, unabhängig davon, welcher Algorithmus im einzelnen benutzt wird.

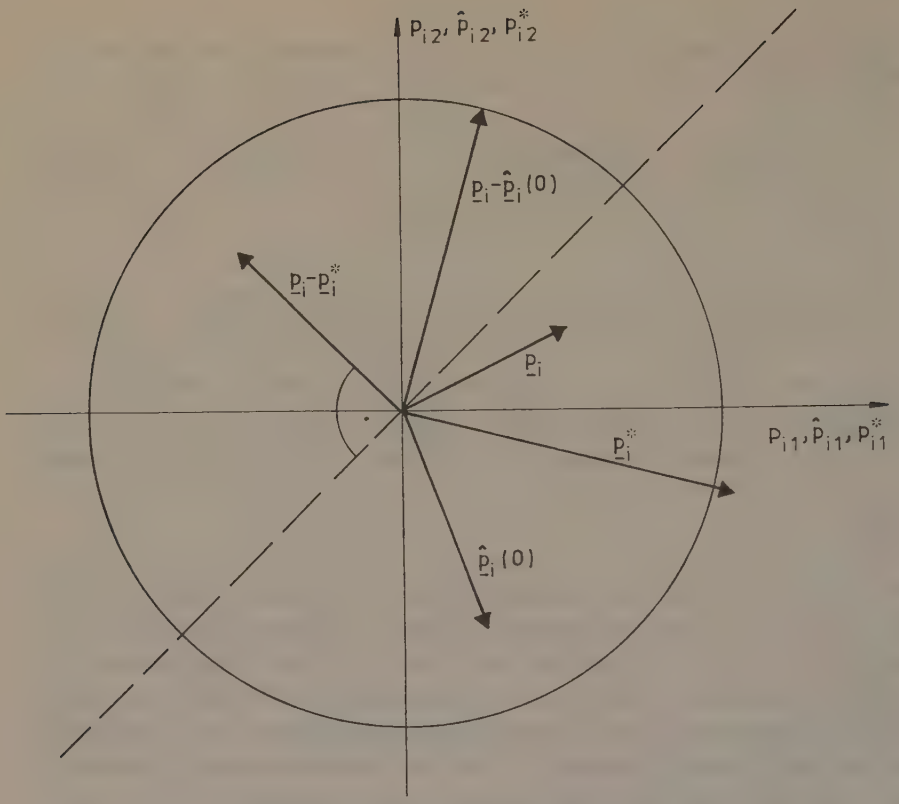



Bild 4.3. Veranschaulichung des Identifikationsproblems mit $\underline{G}_i = \underline{I}$

Will man für $k \to \infty$ die Konvergenz der Parameterfehlervektoren $(\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k))$ gegen Null, d. h. die Konvergenz der Reglerparameter gegen den angepaßten Zustand erzwingen, so muß man durch geeignete Erregung des gesamten Regelungssystems dafür sorgen, daß sich die Signalvektoren $\underline{x}_i(k)$ für alle k in den *gesamten* Räumen $\mathbb{R}^{\dim(\underline{x}_i)}$ bewegen und ihre Bewegung für $k \to \infty$ nicht auf Hyperebenen dieser Räume beschränkt ist. Dies läßt sich leicht zeigen. Aus der Gleichung (4.47) für die vermehrten Fehler folgt (unter der Annahme $v_i(k) \equiv 0$ für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$) für den stationären Fall, in dem $\bar{e}_i(k) \equiv 0$ und $\underline{p}_i(k) = \underline{p}_i^*$ für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$ ist,

$$0 = (\underline{p}-\underline{p}_i^*)^T \underline{x}_i(k+\nu-\bar{d}_e-d_i^a) \text{ für alle } \nu; \quad i=1,\ldots,q\,. \tag{4.63}$$

Aus Gl.(4.63) kann nun das homogene lineare Gleichungssystem

$$\underline{X}_i(\underline{p}_i-\underline{p}_i^*) = \underline{0}; \quad i=1,\ldots,q \tag{4.64a}$$

mit den quadratischen Matrizen

$$\underline{X}_i = \begin{bmatrix} \underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a) \\ \underline{x}_i^T(k+1-\bar{d}_e-d_i^a) \\ \underline{x}_i^T(k+2-\bar{d}_e-d_i^a \\ \vdots \\ \underline{x}_i^T(k+\dim(\underline{x}_i)-1-\bar{d}_e-d_i^a) \end{bmatrix}; \quad i=1,\ldots,q \tag{4.64b}$$

der Dimension $\dim(\underline{x}_i)$ x $\dim(\underline{x}_i)$ aufgestellt werden. Gl.(4.64a) besitzt dann und nur dann die triviale Lösung

$$\underline{p}_i^* = \underline{p}_i \; ; \quad i=1,\ldots,q\,, \tag{4.65}$$

falls

$$\text{rang } (\underline{X}_i) = \dim(\underline{x}_i); \quad i=1,\ldots,q \tag{4.66}$$

ist, d. h. nur in diesem Fall konvergieren die geschätzten Parametervektoren $\hat{\underline{p}}_i$ gegen die exakten Parametervektoren $\underline{p}_i$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$).

Gelingt es nun, durch externe Signale die Bedingung nach Gl.(4.66) zu erfüllen, so konvergieren die Reglerparameter gegen den angepaßten Zustand. Als externe Signale stehen bei der Struktur nach Bild 4.1 die Sollwerte $\underline{w}$ zur Verfügung. Jene Klassen von externen Signalen, durch die Gl.(4.66) erfüllt wird, heißen "permanent anregend" (engl. "persistently exciting"; vgl. Narendra und Annaswamy (1983)). Bis

heute existieren nur hinreichende Bedingungen für solche Signale (Kim und Lindorff (1974)).

In der Praxis ist es aus übergeordneten Gründen häufig nicht möglich, direkt durch die Sollwerte $\underline{w}$ die Adaption anzuregen. Vielmehr ist es günstiger, auf den gefilterten Sollwertvektor $\underline{w}_V$ nach Bild 4.1 einen zusätzlichen Testsignalvektor zu addieren. Die einzelnen Testsignale sollten einerseits ein genügend großes Spektrum haben, um die Adaption zu beschleunigen, andererseits sollten ihre Amplituden so klein wie möglich sein, um ihre im Prinzip störende Wirkung auf die Regelgrößen gering zu halten. Hierzu haben sich PRBS-Signale bewährt, die so gewählt werden sollten, daß ihre Kreuzkorrelationsfunktionen bzw. Kovarianzen untereinander sehr klein sind, so daß sie näherungsweise orthogonal und damit untereinander linear unabhängig sind (vgl. Kudva und Narendra (1974)).

### 4.3.2. Die Beziehung des Adaptionsalgorithmus nach Satz 4.1 zu anderen Verfahren

Aus dem Adaptionsalgorithmus nach Satz 4.1 lassen sich einige wohlbekannte Verfahren durch geeignete Wahl der Gewichtungsfaktoren $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ und $\lambda_3(k)$ als Spezialfälle gewinnen.

Für

$$\lambda_1(k) \equiv 1, \quad \lambda_2(k) \equiv \overline{\lambda}_2 > \frac{1}{2} \tag{4.67}$$

$$\lambda_3(k) \equiv 0 \text{ für alle } k \geq 0 \tag{4.68}$$

und

$$\underline{G} = \underline{I} \tag{4.69}$$

erhält man den Algorithmus der stochastischen Approximation nach Goodwin et al. (1981).

Für

$$\lambda_1(k) \equiv 0 \quad \text{für alle } k \geq 0 \tag{4.70}$$

erhält man sogenannte "fixed gain"-Verfahren. Einen Spezialfall stellt hier das Verfahren von Kudva und Narendra (1974) mit

$$\lambda_1(k) \equiv 0, \quad \lambda_2(k) \equiv \overline{\lambda}_2 > \frac{1}{2}, \quad \lambda_3(k) \equiv 0 \tag{4.71}$$

dar. Auch das Verfahren von Ionescu und Monopoli (1977), bei dem

$$\lambda_1(k) \equiv 0, \quad \lambda_2(k) \equiv \overline{\lambda}_2 > \frac{1}{2}, \quad \lambda_3(k) \equiv 1 \tag{4.72}$$

gewählt wird, gehört in diese Kategorie.

Um die Konvergenzrate zu erhöhen, ist die Frage interessant, für welche Werte der Gewichtungsfaktoren die Norm des Parameterfehlervektors $[\underline{p}-\hat{\underline{p}}(k)]^T \underline{G}^{-1} [\underline{p}-\hat{\underline{p}}(k)]$ möglichst schnell abnimmt. Nach Gl. (A6.1) und Gl.(A6.5) ist die Abnahme dieser Norm gleich dem Gradienten

$$\begin{aligned} V(k) - V(k-1) &= \Delta V(k) = \\ &= -r(k)\, \bar{e}^2(k)\, [2-r(k)\, \underline{x}^T(k-\delta)\, \underline{G}\, \underline{x}(k-\delta)] \\ &\leq 0 \,. \end{aligned} \tag{4.73}$$

Die Norm des Parameterfehlervektors nimmt also dann am schnellsten ab, wenn der Betrag von $\Delta V(k)$ maximal wird. Dieses Maximum wird erreicht für

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\Delta V(k)|}{\partial r(k)} &= 2\bar{e}^2(k)\, [1 - r(k)\, \underline{x}^T(k-\delta)\, \underline{G}\, \underline{x}(k-\delta)] \\ &\stackrel{!}{=} 0 \,. \end{aligned} \tag{4.74}$$

Da die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2 |\Delta V(k)|}{\partial r^2(k)} = -2e^2(k)\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)$$

$$\leq 0$$

für alle $k \geq 0$ ist, ergibt sich aus Gl.(4.74) ein Maximum. Gl.(4.74) führt auf die Lösung

$$r(k) = \frac{1}{\underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \tag{4.75}$$

und damit nach Gl.(4.32) auf die Gewichtungsfaktoren

$$\lambda_1(k) \equiv 0, \quad \lambda_2(k) \equiv 1, \quad \lambda_3(k) \equiv 0. \tag{4.76}$$

Nicht enthalten im Algorithmus nach Satz 4.1 sind Least-squares-Verfahren. Einen Algorithmus, der als Verallgemeinerung des Standard-Least-squares-Verfahrens angesehen werden kann, geben Lozano und Landau (1981) an. Dieser Algorithmus hat die Form

$$\hat{\underline{p}}(k) = \hat{\underline{p}}(k-1) + \underline{G}(k)\ \underline{x}(k-\delta)\ \frac{\bar{e}(k)}{1 + \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}(k)\ \underline{x}(k-\delta)}$$

$$\underline{G}^{-1}(k) = \lambda_1(k)\ \underline{G}^{-1}(k-1) + \lambda_2(k)\ \underline{x}(k-\delta)\ \underline{x}^T(k-\delta)$$

$$0 \leq \lambda_1(k) \leq 1; \quad 0 \leq \lambda_2(k) < 2$$

$$\underline{G}(-1) = \underline{G}^T(-1) > 0.$$

Obwohl Least-squares-Verfahren gute Konvergenzeigenschaften haben, werden sie in der vorliegenden Arbeit nicht empfohlen, da sie insbesondere im Mehrgrößenfall sehr aufwendig zu realisieren sind und die Berechnung der Bewertungsmatrix $\underline{G}(k)$ sehr rechenzeitintensiv ist.

### 4.3.3. Notwendige a priori-Kenntnisse

#### 4.3.3.1. A priori-Kenntnisse über die Struktur der Regelstrecke

Für den Entwurf des adaptiven Reglers nach Abschnitt 4.2 wird vorausgesetzt, daß die Grade $n(A_i)$ und $n(B_{ij})$ und die Schrittver-

zögerungen $d_{ij}$ der Regelstrecke für alle $i,j \in \{1,\ldots,q\}$ bekannt sind (vgl. Abschnitt 4.1). Diese Daten werden hier als Strukturdaten aufgefaßt. Die Strukturdaten der Regelstrecke sind aber im allgemeinen a priori nicht exakt bekannt. Es soll daher in diesem Abschnitt unter anderem die Frage erörtert werden, wie genau diese Daten abgeschätzt werden müssen.

Die Strukturdaten der Regelstrecke legen die Anzahl der Streckenparameter fest, die zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens der Regelstrecke mindestens erforderlich sind. Damit bestimmen sie aber auch die minimale Anzahl der Reglerparameter, die für den Kompensatorenentwurf nach Kapitel 3, der dem vorgestellten adaptiven Regler zugrundeliegt, benötigt wird. D. h. die Strukturdaten legen die Dimension der Parametervektoren $p_i$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$) des Reglers nach Gl.(4.22) fest, die entsprechend Gl.(4.25) von der Anzahl der Ein- und Ausgänge und den Graden der Polynome $E_{ij}(z^{-1})$ und $S_{Ii}(z^{-1})$ abhängt. Für die Grade der Polynome $E_{ij}(z^{-1})$ gilt nach Gl.(4.2)

$$n(E_{ij}) = n(B_{ij}) + n(R_{Ii}); \quad i,j \in \{1,\ldots,q\}. \tag{4.77}$$

Mit den Gln.(2.87a), Gl.(2.92) und Gl.(2.93) erhält man entsprechend Anhang A1, Gl.(A1.7) und Gl.(A1.8) für die Grade der Polynome $R_{Ii}(z^{-1})$ und $S_{Ii}(z^{-1})$

$$n(R_{Ii}) = \bar{d}_e + d_i^a - 2 + n_{Ri}$$

$$\text{mit } n_{Ri} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ;\quad i = 1,\ldots,q \tag{4.78}$$

$$n(S_{Ii}) = \max\{\max[n(A_i) + n_z,\ n(A_{Mi})-1] - (\bar{d}_e + d_i^a - 1),$$

$$n(A_i) + n_z + n_{Ri}\};\quad i = 1,\ \ldots,\ q. \tag{4.79}$$

Mit den Gln.(4.77), (4.78) und (4.79) ergibt sich aus Gl.(4.25)

$$\dim(\underline{p}_i) = (\bar{d}_e + d_i^a + n_{Ri})\, q + \sum_{j=1}^{q} n(B_{ij})$$

$$+ \max\{\max[n(A_i) + n_z,\ n(A_{Mi}) - 1]$$

$$- (\bar{d}_e + d_i^a - 1),$$

$$n(A_i) + n_z + n_{Ri}\};\quad i = 1, \ldots, q. \qquad (4.80)$$

Gl.(4.80) zeigt, wie die Anzahl der in den Vektoren $\underline{p}_i$ zusammengefaßten exakten Reglerparameter von den Strukturdaten der Regelstrecke und den frei wählbaren Entwurfsparametern $n_z$, $n(A_{Mi})$ und $n_{Ri}$ abhängt. Es ist nun einsichtig, daß

$$\dim(\hat{\underline{p}}_i) = \dim(\underline{p}_i);\quad i = 1, \ldots, q$$

(vgl. Gl.(4.25)) gewählt werden muß, damit für das durch Gl.(4.47) definierte Schätzproblem überhaupt ein angepaßter Zustand mit $\hat{\underline{p}}_i(k) \equiv \underline{p}_i$ und $\bar{e}_i(k) \equiv 0$ für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$ existiert. Wird eins der Zählerpolynome $B_{ij}(z^{-1})$ oder der Nennerpolynome $A_i(z^{-1})$ mit zu geringem Grad angesetzt, so kann das dynamische Verhalten der Regelstrecke nicht mehr exakt durch das sich ergebende mathematische Modell beschrieben werden, da die Ordnung dieses mathematischen Modells zu gering ist. Für den adaptiven Regler bedeutet dies, daß theoretisch ein angepaßter Zustand nicht existiert, wenn eins der Polynome $A_i(z^{-1})$ oder $B_{ij}(z^{-1})$ mit zu geringem Grad angesetzt wird. Wählt man hingegen für das mathematische Modell der Regelstrecke eine zu hohe Ordnung, so ist die Beschreibung ihres dynamischen Verhaltens zwar exakt möglich, aber nicht mehr eindeutig. Denn eine zu hohe Ordnung führt für das mathematische Modell der Regelstrecke, d. h. für die Übertragungsmatrix nach Gl. (2.1) dazu, daß mindestens eine der Übertragungsfunktionen

$$G_{ij}(z^{-1}) = \frac{\bar{B}_{ij}(z^{-1})}{\bar{A}_{ij}(z^{-1})}$$

ein beliebiges gemeinsames Teilerpolynom im Zähler und Nenner haben kann, ohne daß dieser Teiler Einfluß auf die Beschreibung des dyna-

mischen Ein-Ausgangsverhalten hat. D. h. für einen Ansatz mit zu hoher Ordnung ist mindestens eine der Übertragungsfunktionen $G_{ij}(z^{-1})$ der Übertragungsmatrix $\underline{G}(z^{-1})$ nach Gl.(2.1) nicht mehr eindeutig. Setzt man demnach die Polynome $A_i(z^{-1})$ und $B_{ij}(z^{-1})$ mit zu großem Grad an, so existiert zwar für den adaptiven Regler ein angepaßter Zustand, dieser ist jedoch nicht mehr eindeutig, da die exakten Parametervektoren $\underline{p}_i$ nicht mehr eindeutig sind.

Ist man - was in der Praxis häufig zutrifft - nicht an der Eindeutigkeit interessiert, sondern möchte nur gewährleisten, daß das Schätzproblem nach Gl.(4.47) für die Reglerparameter überhaupt eine Lösung mit $\bar{e}_i(k) \equiv 0$ und damit auch $e_i(k) \equiv 0$ für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$ hat, so kann man dies also dadurch erreichen, daß die a priori abzuschätzenden Grade der Polynome $A_i(z^{-1})$ und $B_{ij}(z^{-1})$ für alle $i,j \in \{1,\ldots,q\}$ *größer* oder gleich den exakten Graden dieser Polynome gewählt werden; mit anderen Worten: Die Grade $n(A_i)$ und $n(B_{ij})$ $(i,j \in \{1,\ldots,q\})$ müssen nicht exakt bekannt sein, sondern es reicht eine Maximalabschätzung dieser Grade. Der adaptive Regler bleibt garantiert funktionsfähig, wenn diese Grade a priori überschätzt werden.

Andererseits ist mit einer zu hohen (a priori) Gradabschätzung der Polynome $A_i(z^{-1}), B_{ij}(z^{-1})$ auch eine beträchtliche Aufwandserhöhung verbunden. Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden. Angenommen, alle Polynome $\bar{A}_{ij}(z^{-1})$ und $\bar{B}_{ij}(z^{-1})$ nach Gl.(2.1) haben den gleichen Grad

$$n(\bar{A}_{ij}) = n(\bar{B}_{ij}) = \bar{n} \text{ für alle } i,j = 1, \ldots, q . \qquad (4.81)$$

Nimmt man ferner an, daß die Polynome $\bar{A}_{ij}(z^{-1})$ für alle $i,j \in \{1,\ldots,q\}$ teilerfremd sind, so gilt nach Gl.(2.3)

$$A_i(z^{-1}) = \prod_{j=1}^{q} \bar{A}_{ij}(z^{-1}); \quad i = 1, \ldots, q .$$

Somit folgt

$$n(A_i) = q\,\bar{n};\quad i = 1, \ldots, q. \tag{4.82a}$$

Nach Gl.(2.4d) gilt dann auch

$$n(B_{ij}) = q\,\bar{n};\quad i,j = 1, \ldots, q. \tag{4.82b}$$

Wählt man nun, um die Anzahl der Reglerparameter möglichst gering zu halten,

$$n(A_{Mi}) \leq q\,\bar{n};\quad i = 1, \ldots, q \tag{4.83a}$$

$$n_{Ri} = 0;\quad i = 1, \ldots, q, \tag{4.83b}$$

so erhält man nach Gl.(4.80) einen Regler mit

$$N_p = \sum_{i=1}^{q} \dim(\underline{p}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \left[(\bar{d}_e + d_i^a)\ q\right] + \bar{n}(q^3 + q^2) + n_z\ q \tag{4.84}$$

Parametern, die in jedem Abtastschritt adaptiv einzustellen sind. Man erkennt, daß die Ordnung $\bar{n}$ der Einzelübertragungsfunktionen $G_{ij}(z^{-1})$ nach Gl.(2.1) multipliziert mit der dritten Potenz der Anzahl q der Ein- und Ausgänge in die Gesamtzahl $N_p$ der Reglerparameter eingeht. Wird für ein System mit nur zwei Ein- und Ausgängen die Ordnung $\bar{n}$ der Einzelübertragungsfunktionen der Regelstrecke a priori nur um 1 überschätzt, so müssen bereits 12 Reglerparameter zusätzlich vorgesehen werden, die bei exakter Kenntnis der Ordnung $\bar{n}$ nicht notwendig gewesen wären. Um den Aufwand so gering wie möglich zu halten, wird man daher versuchen, das dynamische Verhalten der Regelstrecke durch ein mathematisches Modell möglichst geringer Ordnung anzunähern. Ähnlich wie bei linearen Reglern hat sich auch bei adaptiven Reglern durch Simulationen und Experimente gezeigt, daß sie auch bei einer a priori-Unterschätzung der Streckenordnung funktionsfähig bleiben, vorausge-

setzt, durch das sich ergebende reduzierte Streckenmodell können noch die dominanten Eigenbewegungen der Regelstrecke genügend genau beschrieben werden. In jüngster Zeit werden wieder verstärkt Versuche unternommen, die Konvergenzeigenschaften adaptiver Regler bei einer a priori-Unterschätzung der Streckenordnung auch theoretisch zu untersuchen (Ioannou und Kokotovic (1983)).

Jetzt soll auf die a priori-Abschätzung der Schrittverzögerungen $d_{ij}$ der Regelstrecke eingegangen werden. Hier verhält es sich genau umgekehrt. Bei einer a priori-Unterschätzung dieser Schrittverzögerungen bleibt das adaptive Regelungssystem garantiert funktionsfähig, vorausgesetzt, es wird ein Korrekturnetzwerk verwendet. Dies soll im folgenden kurz erläutert werden. Das reale Verhalten der Regelstrecke soll durch die Übertragungsfunktion

$$\underline{G}(z^{-1}) = \underline{A}^{-1}(z^{-1})\ \tilde{\underline{D}}_a(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\ \tilde{\underline{D}}_e(z^{-1}) \tag{4.85}$$

festgelegt sein, wobei gilt

$$\tilde{\underline{D}}_a(z^{-1}) = \mathrm{diag}\{z^{-\tilde{d}_i^a}\};\quad i = 1, \ldots, q \tag{4.86a}$$

$$\tilde{\underline{D}}_e(z^{-1}) = \mathrm{diag}\{z^{-\tilde{d}_i^e}\};\quad i = 1, \ldots, q\,. \tag{4.86b}$$

Mit $\underline{D}_a(z^{-1})$ und $\underline{D}_e(z^{-1})$ werden weiterhin die für den Reglerentwurf benutzten, aufgrund einer a priori-Abschätzung der aus- bzw. eingangsseitigen Schrittverzögerungen der Regelstrecke gewonnenen Matrizen nach Gln.(2.22c,d) bezeichnet. Dabei wird angenommen, daß die wahren Schrittverzögerungen a priori unterschätzt wurden, d. h.

$$\tilde{d}_i^a = d_i^a + \Delta d_i^a;\quad i = 1, \ldots, q \tag{4.87a}$$

$$\tilde{d}_i^e = d_i^e + \Delta d_i^e;\quad i = 1, \ldots, q \tag{4.87b}$$

mit

$$\Delta d_i^a \geq 0 \text{ und } \Delta d_i^e \geq 0;\quad i = 1, \ldots, q\,. \tag{4.88}$$

Durch Vergleich von Gl.(4.86) mit Gl.(2.16) erhält man dann für die Polynommatrix $\underline{B}(z^{-1})$ die Beziehung

$$\tilde{\underline{D}}_a(z^{-1})\ \tilde{\underline{B}}(z^{-1})\ \tilde{\underline{D}}_e(z^{-1}) = \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\ \underline{D}_e(z^{-1}). \qquad (4.89)$$

Mit der Notation

$$\tilde{\underline{B}}(z^{-1}) = \{\tilde{B}_{ij}(z^{-1})\};\quad i,j = 1, \ldots, q$$

ergeben sich für die Elemente der $\underline{B}$-Matrix die Bedingungen

$$B_{ij}(z^{-1}) = \tilde{B}_{ij}(z^{-1})\ z^{-(\Delta d_i^a + \Delta d_j^e)};\quad i,j = 1, \ldots, q. \qquad (4.90)$$

Gl.(4.90) zeigt, daß bei einer a priori-Unterschätzung der aus- oder eingangsseitigen Schrittverzögerungen $d_i^a$ und $d_i^e$ nach Gl.(4.87a) bzw. Gl.(4.87b), die entsprechend den Gln.(2.5) und (2.9) aus einer Unterschätzung der Schrittverzögerungen $d_{ij}$ resultiert, die ersten $(\Delta d_i^a + \Delta d_j^e)$-Koeffizienten $b_{ij0}$ bis $b_{i,j,\Delta d_i^a + \Delta d_j^e - 1}$ der Polynome $B_{ij}(z^{-1})$ identisch Null sind. Bei dem Reglerentwurf mit Korrekturnetzwerk wird aber an keiner Stelle gefordert, daß diese Koeffizienten ungleich Null sein müssen; lediglich die Bedingung nach Gl.(3.6) bzw. für den adaptiven Regler nach Gl.(4.60) muß durch geeignete Wahl des Korrekturnetzwerkes erfüllt werden, damit der Stellgrößenvektor berechenbar ist. Diese Überlegungen führen weiterhin zu dem Schluß, daß das in Abschnitt 4.2 vorgestellte adaptive Regelungskonzept auch für Regelstrecken mit *veränderlichen* Schrittverzögerungen (Totzeiten) anwendbar ist, wobei nur eine untere Schranke dieser Schrittverzögerungen abgeschätzt werden muß. D. h. in Gl.(4.87a) und Gl.(4.87b) müssen die Größen $d_i^a$ und $d_i^e$ für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$ so bestimmt werden, daß die Differenzen $\Delta d_i^a$ und $\Delta d_i^e$ zu den realen Schrittverzögerungen stets entsprechend Gl. (4.88) größer oder gleich Null sind; diese Differenzen $\Delta d_i^a$ und $\Delta d_i^e$ müssen aber weder für alle Zeiten konstant sein, noch ist ihre Kenntnis erforderlich.

Im Gegensatz zur Unterschätzung der Schrittverzögerungen kann eine Überschätzung zur Funktionsunfähigkeit des adaptiven Regelsystems führen. Auch dies wird an den Gln.(4.87a,b) und Gl.(4.90) deutlich. Eine a priori-Überschätzung der Schrittverzögerungen bedeutet ja, daß mindestens eine der Differenzen $\Delta d_i^a$ oder $\Delta d_j^e$ nach Gln.(4.87a,b) zu den wahren Schrittverzögerungen negativ ist. Dies hat wiederum zur Folge, daß mindestens q Polynome $B_{ij}(z^{-1})$ nach Gl.(4.90) aus nicht kausalen Termen (positive Potenzen von z) bestehen, so daß ein angepaßter Zustand nicht existiert. Die Erfahrung hat gezeigt, daß in der Tat bei einer a priori Überschätzung der Schrittverzögerungen keine sinnvolle Regelung möglich ist.

4.3.3.2. A priori-Kenntnisse über die Parameter der Regelstrecke

Vom theoretischen Standpunkt aus besitzt der in Abschnitt 4.2 dargestellte adaptive Regler den Nachteil, daß entsprechend Schlußfolgerung 4.3 durch das Korrekturnetzwerk die Stabilitätsbedingung Gl.(3.7) erfüllt werden muß. In dieser Gleichung gehen die unbekannten Parameter der Regelstrecke, die in den Polynommatrizen $\underline{A}(z^{-1})$ und $\underline{B}(z^{-1})$ zusammengefaßt sind,ein. Zur Dimensionierung des Korrekturnetzwerkes nach Abschnitt 3.5 müssen also auch a priori-Kenntnisse über die Streckenparameter vorliegen.

Für asymptotisch stabile Regelstrecken sind dabei nur geringe a priori-Kenntnisse erforderlich. Dazu wird folgende Aussage betrachtet:

Satz 4.4. Sind die sich nach dem sequentiellen Entwurfsalgorithmus aus Abschnitt 3.5.1.2 ergebenden Übertragungsfunktionen $\bar{G}_{EdTi,i}^{(i-1)}(z^{-1})$ nach Gl.(3.104) für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$ mit

$$\bar{G}_{EdT11}^{(0)}(z^{-1}) = \frac{\bar{B}_{ET11}^{(0)}(z^{-1})}{\bar{A}_{ET11}^{(0)}(z^{-1})} := G_{d11}(z^{-1}) \qquad (3.114a)$$

asymptotisch stabil und haben keine Nullstelle bei $z = 1$, so können die (Stabilitäts-)Bedingungen nach Gln.(3.99) und (3.107) mit einem stabilen Korrekturnetzwerk, d. h. mit stabilen Übertragungsfunktionen $\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})$ nach Gln.(3.97) und (3.105) einfach durch folgende zwei Bedingungen erfüllt werden:

1. Die Polynome $\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})$ haben für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ höchstens eine einfache Wurzel bei $z = 1$ und alle anderen Wurzeln innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene mit $|z|<1$.

2. Angenommen die Polynome $\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})$ besitzen eine einfache Wurzel bei $z = 1$. Schreibt man die Übertragungsfunktionen $\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})$ nach Gln.(3.97) und (3.105) in ihrer faktorisierten Form

$$\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1}) = \frac{\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})}{\bar{A}_{Ki,i}(z^{-1})}$$

$$= K_{Ki} \frac{\prod_{l=1}^{n(\bar{B}_{Ki,i})} (1-\beta_{Kil}\, z^{-1})}{\prod_{l=1}^{n(\bar{A}_{Ki,i})} (1-\alpha_{Kil}\, z^{-1})};$$

$$i = 1, \ldots, q, \qquad (4.91)$$

so wird für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ $|K_{Ki}|$ genügend groß und

$$\operatorname{sgn}(K_{Ki}) = \operatorname{sgn}(\bar{G}_{EdTi,i}^{(i-1)}(1)); \; i = 1, \ldots, q \qquad (4.92)$$

gewählt. D. h. das Vorzeichen des Vorfaktors $K_{Ki}$ der Übertragungsfunktion $\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})$ wird gleich dem Vorzeichen des Verstärkungsfaktors der Übertragungsfunktion $\bar{G}_{EdTi,i}^{(i-1)}(z^{-1})$ gesetzt.

Haben hingegen alle Polynome $\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})$ alle Wurzeln innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene mit $|z| < 1$, so muß nur

für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ $|K_{Ki}|$ genügend groß gewählt werden; das Vorzeichen von $K_{Ki}$ spielt für die Erfüllung der Bedingungen nach Gln.(3.99) und (3.107) dann keine Rolle.

Dieser Satz ist in Anhang A7 mit Hilfe der Wurzelortskurvenmethode bewiesen.

Ist die Regelstrecke asymptotisch stabil und werden durch die asymptotisch stabilen Funktionen $\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})$ des Korrekturnetzwerks die Stabilitätsbedingungen nach Gln.(3.99) und (3.107) sequentiell für $i = 1$ bis $q$ erfüllt, so sind entsprechend Anhang A3, Satz A3.1, auch alle sich ergebenden Funktionen $\bar{G}_{EdTi,i}^{(i-1)}(z^{-1})$ asymptotisch stabil. Da - wie bereits im Abschnitt 3.5.1.3 erläutert - für asymptotisch stabile Regelstrecken die Voraussetzung nach Aussage 3.1 trivial ist, sind in diesem Fall unter Berücksichtigung von Satz 3.3 die Bedingungen nach Gln.(3.99) und (3.107) mit der nach Gl.(3.7) identisch. D. h. werden die zwei Bedingungen nach Satz 4.4 sequentiell für alle $i = 1$ bis $q$ eingehalten, so ist mit den sich ergebenden Matrizen $\underline{B}_K(z^{-1})$ und $\underline{A}_K(z^{-1})$ des Korrekturnetzwerks nach Gln.(3.111a,b) der in Abschnitt 4.2 entworfene adaptive Regelkreis für stabile Regelstrecken garantiert asymptotisch stabil.

Nach Gl.(3.32a) und Gl.(3.111a) haben für den Regler mit $(n_z+1)$-fachem expliziten I-Verhalten die Polynome $\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})$ für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ eine $(n_z+1)$-fache Wurzel bei $z = 1$. Demnach führt die erste Bedingung von Satz 4.4 auf den Regler ohne $(n_z = -1)$ bzw. mit einfachem $(n_z = 0)$ expliziten I-Verhalten. Der Regler mit einfachem expliziten I-Verhalten ist stationär genau für sprungförmige Sollwertänderungen und Störungen, was in der Praxis meistens ausreichend ist. Um für diesen Reglertyp die Vorzeichen der Vorfaktoren $K_{Ki}$ nach Gl.(4.92) für $i = 1$ bis $q$ bestimmen zu können, müssen nur a priori-Kenntnisse über die Verstärkungsmatrix $\underline{G}(1)$ der Regelstrecke (vgl. Gl.(2.1)) vorliegen, wie im folgenden gezeigt wird. Da die Zählerpolynome $\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})$ jeder Übertragungsfunktion $\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})$ für $n_z = 0$ für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ eine Wurzel

bei $z = 1$ haben (vgl. Gln.(3.32a), (3.97), (3.105) und (3.111a)), gilt

$$\bar{G}_{Kdi,i}(1) = 0; \quad i = 1, \ldots, q . \tag{4.93}$$

Wendet man nun Satz 3.4 speziell auf den Punkt $z = z^{-1} = 1$ an, so folgt mit Gl.(3.93) aus Gl.(3.113)

$$\tilde{G}_{EdTi,i}^{(i-1)}(1) = \frac{\det \bar{\underline{G}}_{di}(1)}{\det \bar{\underline{G}}_{di-1}(1)}; \quad i = 1, \ldots, q . \tag{4.94}$$

Da nach Gl.(2.6) und Gl.(2.11) für die Verzögerungsmatrizen $\underline{D}_a(1) = \underline{D}_e(1) = \underline{I}$ ist, folgt aus Gl.(2.16) und Gl.(3.67)

$$\bar{\underline{G}}_d(1) = \underline{G}(1). \tag{4.95}$$

Bezeichnet man in Analogie zu Satz 3.4 mit $\underline{G}_i(z^{-1})$ die nordwestliche quadratische Untermatrix der Dimension ixi der Übertragungsmatrix $\underline{G}(z^{-1})$ der Regelstrecke nach Gl.(2.1), d. h.

$$\underline{G}_i(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11}(z^{-1}) & \ldots & G_{1i}(z^{-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{i1}(z^{-1}) & \ldots & G_{ii}(z^{-1}) \end{bmatrix}; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.96}$$

mit

$$G_{ij}(z^{-1}) = \frac{\tilde{B}_{ij}(z^{-1})}{\tilde{A}_{ij}(z^{-1})} z^{-d_{ij}}; \quad i,j = 1, \ldots, q , \tag{4.97}$$

so ergibt sich mit Gl.(4.95) und Gl.(4.94) aus Gl.(4.92)

$$\operatorname{sgn}(K_{Ki}) = \operatorname{sgn}\left\{\frac{\det \underline{G}_i(1)}{\det \underline{G}_{i-1}(1)}\right\}; \quad i = 1, \ldots, q , \tag{4.98}$$

wobei entsprechend Gl.(3.114a) ebenfalls

$$\det \underline{G}_O(1) := 1 \tag{4.99}$$

definiert wird.

Die vorangegangenen Überlegungen können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

Schlußfolgerung 4.5. Angenommen die Regelstrecke ist asymptotisch stabil, dann kann die Stabilitätsbedingung Gl.(3.7) mit einem Korrekturnetzwerk mit Diagonalstruktur nach Gln.(3.111a,b) erfüllt werden, wobei für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ die Nennerpolynome $\bar{A}_{Ki,i}(z^{-1})$ beliebige Hurwitzpolynome sind und die Zählerpolynome $\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})$ höchstens eine einfache Wurzel bei $z = 1$ und alle anderen Wurzeln innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene haben. Die Vorfaktoren $K_{Ki}$ der Einzelübertragungsfunktionen des Korrekturnetzwerkes nach Gl.(4.91) müssen dann betragsmäßig genügend groß gewählt werden. Für den Fall, daß die Polynome $\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})$ eine Wurzel bei $z = 1$ haben, müssen die Vorfaktoren $K_{Ki}$ zusätzlich die Vorzeichenbedingung nach Gl.(4.98) erfüllen.

Um eine stabile adaptive Regelung für asymptotisch stabile Regelstrecken zu entwerfen, sind nach Schlußfolgerung 4.5 im Prinzip keine a priori-Kenntnisse über die Parameter der Regelstrecke erforderlich, vorausgesetzt man verwendet einen Regler ohne explizites I-Verhalten, da dann die Zählerpolynome $\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})$ des Korrekturnetzwerks als Hurwitzpolynome gewählt werden können. Um Stabilität zu garantieren, kann man dann zunächst die Beträge der Vorfaktoren $K_{Ki}$ der einzelnen Elemente des Korrekturnetzwerkes sehr groß wählen und diese im on line-Betrieb soweit reduzieren, bis sich ein gewünschtes dynamisches Verhalten des gesamten Regelungssystems einstellt. Da aber der Regler ohne explizites I-Verhalten für sprungförmige Sollwertänderungen und Störungen nicht stationär genau ist und somit eine Abweichung zwischen den stationären Regelgrößen $\underline{y}$ und den stationären Ausgangsgrößen $\underline{y}_M$ des Parallelmodells auftritt (vgl. Gl.(3.32)), ist er häufig in der Praxis nicht brauchbar. Hier ist der Regler mit einfachem expliziten I-Verhalten vorzuziehen, bei dem unter den genannten Bedingungen die Regelgröße

$\underline{y}$ stationär den Ausgangsgrößen $\underline{y}_M$ des Parallelmodells exakt folgen. Da für diesen Reglertyp nach Gl.(3.32a) und Gl.(3.11b) die Polynome $\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})$ eine einfache Wurzel bei $z = 1$ haben, müssen a priori-Kenntnisse über die Verstärkungsfaktoren der Regelstrecke vorliegen, die eine Abschätzung der Vorzeichen der Vorfaktoren $K_{Ki}$ nach Gl. (4.98) erlauben. Sind diese nicht vorhanden, so kann man zunächst einen Regler ohne explizites I-Verhalten einsetzen, um aus den adaptiv eingestellten Reglerparametern Informationen über die Verstärkungsmatrix der Regelstrecke zu bekommen. Danach kann man mit den sich ergebenden Schätzwerten für die Streckenverstärkungsmatrix Gl.(4.98) auswerten und auf den Regler mit einfachem expliziten I-Verhalten umschalten. Wie man aus den Schätzwerten der Reglerparameter eine Abschätzung über die Verstärkungsmatrix der Regelstrecke gewinnt, ist in Anhang A8 erläutert.

Nach Schlußfolgerung 4.5 ist für eine asymptotisch stabile Regelstrecke unter den angegebenen Bedingungen eine Stabilisierung des adaptiven Reglers nach Abschnitt 4.2 speziell durch die Wahl

$$\underline{A}_K(z^{-1}) = \underline{I} \tag{4.100a}$$

$$\underline{B}_K(z^{-1}) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\ \underline{B}'_K(z^{-1})$$

$$= (1-z^{-1})^{n_z+1}\ \underline{K}_K \tag{4.100b}$$

mit

$$\underline{K}_K = \text{diag}\ \{K_{Ki}\};\ i = 1, \ldots, q \tag{4.100c}$$

$$n_z \in \{-1,0\} \tag{4.100d}$$

möglich. Dies führt mit Gl.(3.2) und Gl.(3.32a) für das Korrekturnetzwerk auf die einfache Beziehung

$$\underline{y}_K(z) = z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{K}_K(1-z^{-1})^{n_z+1}\ \underline{u}_d(z)$$

$$= z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{K}_K\ \underline{u}_{dI}(z). \tag{4.101}$$

Für instabile Regelstrecken sind mehr a priori-Kenntnisse erforderlich. Hierzu zählt insbesondere eine Abschätzung der Wertebereiche, in denen sich die Streckenparameter bewegen können. Dies ist allerdings nur ein theoretischer Nachteil des Verfahrens. Bis heute existiert nämlich noch kein adaptives Regelungskonzept, bei dem allgemein eine Abschätzung des *Einschwingverhaltens* a priori durchgeführt werden kann. Für den praktischen Einsatz haben aber gerade die Einschwingvorgänge eine große Bedeutung, die außer von den Anfangswerten der Parameterfehler $(\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(0))$ $(i \in \{1,\ldots,q\})$ von den freien Entwurfsparametern wie Parallelmodell, Korrekturnetzwerk, den Bewertungsmatrizen $\underline{G}_i$ nach Gl.(4.50) und den Gewichtungsfaktoren $\lambda_{1i}(k)$, $\lambda_{2i}(k)$ und $\lambda_{3i}(k)$ nach Gl.(4.51) bis (4.53) abhängen. Um den Einfluß dieser Entwurfsparameter abzuschätzen, ist man häufig auf die Simulationstechnik angewiesen, für deren Anwendung aber ebenfalls eine grobe a priori-Kenntnis des dynamischen Verhaltens der Regelstrecke vorhanden sein muß. [1] Der Vorteil des adaptiven Reglers liegt darin, daß diese a priori-Kenntnisse geringer sein können als bei linearen Reglern und sich der Regler an ein zeitvariantes Verhalten der Regelstrecke anpassen kann. Damit ist auch eine leichte Übertragbarkeit auf Prozesse gleichen Typs (z. B. Destillationskolonnen), aber mit unterschiedlichen Parametern gewährleistet. Als Vorteil wird ferner empfunden, daß sich der adaptive Regler direkt mit Meßdaten des realen Prozesses on-line einstellt (und nicht nur mit einem a priori-Prozeßmodell eingestellt wird), so daß aus den sich ergebenden Reglerparametern $\hat{\underline{p}}_i$ $(i \in \{1,\ldots,q\})$ wieder auf das Prozeßverhalten geschlossen werden kann.

---

[1] Schmid (1979) hat die bei umfangreichen Simulationen mit Eingrößensystemen für verschiedene adaptive Regelkonzepte gemachten Erfahrungen zusammengefaßt, woraus Richtlinien für die Festlegung der freien Entwurfsparameter abgeleitet werden können. Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit gemachten Erfahrungen und die daraus resultierenden Empfehlungen für die Auslegung der freien Entwurfsparameter werden in Abschnitt 5 behandelt.

## 4.4. Die Adaption im gestörten Regelkreis

### 4.4.1. Das Stabilitätsproblem

In diesem Abschnitt soll der Einfluß von Störungen auf die Einstellung der Reglerparameter $\hat{p}_i$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$) erörtert werden. Das grundsätzliche Problem, das hierbei besteht, wird durch Gl.(4.26) deutlich. Jeder (gefilterte) Fehler $e_{Mi}$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$) besteht aus einer Linearkombination der Parameterfehler $[\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k)]$ *und* der Störungen $v_i$. Damit ist es aber prinzipiell nicht möglich, allein durch Messung der natürlichen Fehler $e_i$ zu entscheiden, ob der Regler fehlangepaßt ist oder ob nur eine Störung des Regelungssystems vorliegt. Diese Unterscheidung wird erst durch zusätzliche a priori-Annahmen über die einwirkenden Störungen oder die Parameter der Regelstrecke ermöglicht. Diese werden auch in den verschiedenen Arbeiten, die sich mit diesem Problem beschäftigen, gemacht. Bevor jedoch darauf eingegangen wird, soll der Effekt von Störungen auf den Adaptionsalgorithmus nach den Gln.(4.48) bis (4.55b) untersucht werden.

Da aufgrund der Struktur des Reglers in Abschnitt 4.2 das Schätzproblem für die Parameter des Mehrgrößenreglers entsprechend Gl. (4.26), Gl.(4.46) und Gl.(4.47) in q Eingrößenschätzprobleme umformuliert wird, genügt es, für die prinzipiellen Untersuchungen in diesem Abschnitt ersatzweise ein Eingrößenschätzproblem der Art

$$e_M(k) = [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-\kappa)]^T \underline{x}(k-\delta) + v(k) \tag{4.102}$$

$$h(k) = [\hat{\underline{p}}(k-\kappa) - \hat{\underline{p}}(k-1)]^T \underline{x}(k-\delta) \tag{4.103}$$

$$\bar{e}(k) = e_M(k) + h(k) \tag{4.104}$$

bzw.

$$\bar{e}(k) = [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-1)]^T \underline{x}(k-\delta) + v(k) \tag{4.105}$$

zu betrachten, wobei $\kappa$ und $\delta$ beliebige (ganze) Zahlen sind. Dieses Schätzproblem entspricht mit $\delta = \bar{d}_e - d_i^a$ und $\kappa = \bar{d}_e - d_i^a - 1$ genau dem

Problem nach Gl.(4.26) und Gln.(4.45) bis (4.47) für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$. Die Verallgemeinerung auf den Mehrgrößenfall erhält man einfach dadurch, daß man die Ergebnisse auf jede Komponente $e_{Mi}$ des gefilterten Fehlervektors nach Gl.(4.20), auf jeden vermehrten Fehler $\bar{e}_i$ und auf jeden Parametervektor $\hat{\underline{p}}_i$ des Reglers nach Gl.(4.23) für $i \in \{1,\ldots,q\}$ anwendet.

Für die Einstellung der (Regler)-Parameter $\hat{\underline{p}}(k)$ gelte weiterhin die Beziehung

$$\hat{\underline{p}}(k) = \hat{\underline{p}}(k-1) + r(k)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)\ \bar{e}(k), \qquad (4.31)$$

wobei für den Faktor $r(k)$ und die Matrix $\underline{G}$ nach wie vor die Beziehungen nach Gln.(4.32) bis (4.36) und Gln.(4.41) bis (4.42b) erfüllt sein sollen. Mit der Ljapunow-Funktion

$$V(k) = [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)]^T\ \underline{G}^{-1}\ [\underline{p} - \underline{p}(k)] \qquad (A6.1)$$

nach Anhang A6.1 folgt im Fall des gestörten Systems nach Gl. (A6.4) unter Berücksichtigung von Gl.(4.105) für deren Gradienten

$$\begin{aligned}\Delta V(k) &= V(k) - V(k-1)\\ &= -r(k)\ \bar{e}^2(k)\ [2-r(k)\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)]\\ &\quad + 2r(k)\ v(k)\ \bar{e}(k).\end{aligned} \qquad (4.106)$$

Da - wie in Anhang A6.1 erläutert - eine positive Konstante $\alpha$ existiert, so daß

$$0 < \alpha \leq 2 - r(k)\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta) \qquad (A6.8)$$

ist, ergibt sich aus Gl.(4.106) für den Gradienten der Ljapunow-Funktion

$$\Delta V(k) \leq -\alpha\, r(k)\ \bar{e}^2(k) + 2r(k)\ v(k)\ \bar{e}(k). \qquad (4.107)$$

Im Unterschied zu Gl.(A6.10), die den Gradienten der Ljapunow-Funktion für den störungsfreien Fall beschreibt, enthält Gl.(4.107) auf der rechten Seite den indefiniten Term 2 r(k) v(k) $\bar{e}$(k), aufgrund dessen keine Stabilitätsaussage möglich ist.

## 4.4.2. Die erste Modifikation des Adaptionsalgorithmus'

Es wird angenommen, für die Störung existiert eine a priori bekannte Schranke $\bar{v}$, so daß

$$|v(k)| \leq \bar{v} \tag{4.108}$$

für alle k ist. Dann ist der Gradient $\Delta V(k)$ der Ljapunow-Funktion nach Gl.(4.106) garantiert negativ, falls

$$|\bar{e}(k)| > \frac{2\,\bar{v}}{2 - r(k)\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \tag{4.109}$$

ist. Dies führt auf die Idee, das Einstellgesetz Gl.(4.31) für die Reglerparameter so abzuändern, daß

$$\underline{\hat{p}}(k) = \underline{\hat{p}}(k-1) + \underline{\phi}(k) \tag{4.110a}$$

$$\underline{\phi}(k) = \begin{cases} = r(k)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)\ \bar{e}(k) \text{ falls} \\ \qquad |\bar{e}(k)| > \dfrac{2\,\bar{v}}{2 - r(k)\ \underline{x}(k-\delta)^T\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \\ = \underline{0} \text{ sonst} \end{cases} \tag{4.110b}$$

ist.

Physikalisch kann dies modifizierte Einstellgesetz so gedeutet werden, daß eine Adaption nur erfolgt, wenn der vermehrte Fehler $\bar{e}$ betragsmäßig größer als die von der maximalen Störung $\bar{v}$ und den Signalen $\underline{x}$ der abhängenden Schranke nach Gl.(4.109) ist, da dann mit Sicherheit der Regler fehlangepaßt ist. Ist der vermehrte Fehler $\bar{e}$ betragsmäßig kleiner als diese Schranke, so kann nicht

unterschieden werden, ob es sich hierbei nur um den Einfluß der Störung oder aber um eine Fehlanpassung des Reglers handelt. Dann wird (vorsichtshalber) keine Adaption durchgeführt, die Reglerparameter bleiben auf ihren alten Werten.

Da für den Fall, daß Gl.(4.109) erfüllt ist, das Adaptionsgesetz nach Gl.(4.110a) und Gl.(4.110b) mit Gl.(4.31) identisch ist, also unverändert erhalben bleibt, ergibt sich in diesem Fall auch der Gradient der Ljapunow-Funktion nach Gl.(4.106), der allerdings jetzt (unter der Voraussetzung, daß Gl.(4.109) erfüllt ist) garantiert nicht positiv ist. Ist Gl.(4.109) nicht erfüllt, so folgt entsprechend Gl.(4.110a,b) $\hat{\underline{p}}(k) = \hat{\underline{p}}(k-1)$ und für die Ljapunow-Funktion nach Gl.(A6.1) gilt $V(k) = V(k-1)$ bzw. für deren Gradienten $\Delta V(k) = V(k) - V(k-1) = 0$. Damit ergeben sich für den Gradienten der Ljapunow-Funktion V(k) nach Gl.(A6.1) mit dem Adaptionsgesetz nach Gln.(4.110a,b) die Abschätzungen

$$\Delta V(k) < 0 \text{ falls } r(k)\ \bar{e}^2(k) \neq 0 \textit{ und}$$

$$|\bar{e}(k)| > \frac{2\bar{v}}{2 - r(k)\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \qquad (4.111a)$$

und

$$\Delta V(k) = 0 \text{ falls } r(k)\ \bar{e}^2(k) = 0 \textit{ oder}$$

$$|\bar{e}(k)| \leq \frac{2\bar{v}}{2 - r(k)\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \,. \qquad (4.111b)$$

Mit Gln.(4.111a,b) erhält man in jedem Fall $\Delta V(k) \leq 0$, so daß V(k) wieder eine (nach unten durch $V_{min} = 0$ beschränkte) monoton abnehmende Funktionenfolge ist. Dies bedeutet, daß V(k) für $k \to \infty$ einem Grenzwert $V^*$ mit

$$\lim_{k\to\infty} V(k) = V^* \qquad (4.112a)$$

$$0 \leq V^* \leq V(0) \qquad (4.112b)$$

zustrebt. Mit der Definition der Ljapunow-Funktion nach Gl.(A6.1) folgt aus Gl.(4.112a), daß der Parameterfehlervektor $[\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)]$ gegen einen Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)] = \underline{p} - \underline{p}^* \tag{4.113}$$

bzw. der geschätzte Parametervektor gegen einen Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \hat{\underline{p}}(k) = \underline{p}^* \tag{4.114}$$

konvergiert. Aufgrund von $\Delta V(k) \leq 0$ gilt ferner, daß auch im gestörten System mit dem Adaptionsgesetz nach Gln.(4.110a,b)

$$[\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)]^T \underline{G}^{-1} [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)] \leq [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-1)]^T \underline{G}^{-1} [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-1)] \tag{4.115}$$

und damit insbesondere

$$[\underline{p} - \underline{p}^*] \underline{G}^{-1} [\underline{p} - \underline{p}^*] \leq [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(0)] \underline{G}^{-1} [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(0)] \tag{4.116}$$

(vgl. Gl.(4.112b)) ist. Aus Gl.(4.115) und Gl.(4.116) ergibt sich, daß der Parameterfehlervektor $[\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)]$ und damit auch der Parametervektor $\hat{\underline{p}}(k)$ für alle Zeiten k beschränkt sind. Die mit Gln. (4.115) und (4.116) verbundenen Aussagen sind mit jenen nach den Gleichungen (4.37) und (4.38) für den störungsfreien Fall identisch. Allerdings ist der Grenzwert $\underline{p}^*$, gegen den der Vektor $\hat{\underline{p}}$ konvergiert, im gestörten System im allgemeinen ein anderer als im ungestörten System.

Da die Ljapunow-Funktion gegen einen konstanten Grenzwert nach Gl.(4.112a) konvergiert, muß ihr Gradient gegen Null konvergieren, d. h.

$$\lim_{k\to\infty} \Delta V(k) = 0 . \tag{4.117}$$

Damit erhält man aus Gln.(4.111a,b), daß entweder

$$\lim_{k\to\infty} r(k)\ \bar{e}^2(k) = 0 \qquad (4.118a)$$

oder

$$|\bar{e}(k)| \leq \frac{2\,\bar{v}}{2 - r(k)\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \quad \text{für } k\to\infty \qquad (4.118b)$$

ist. Dabei bedeutet die Schreibweise

$$|x(k)| \leq M(k) \quad \text{für } k\to\infty$$

für ein beliebiges Signal x(k), daß für große Zeiten, d. h. nach Abklingen der Einschwingvorgänge, das Signal x(k) betragsmäßig kleiner wird als die Schranke M(k), die auch zeitabhängig sein kann. Da das Signal x(k) sich innerhalb dieser Schranke beliebig bewegen kann, braucht im allgemeinen der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} x(k)$ nicht zu existieren. Dieser Sachverhalt ist in Bild 4.4 veranschaulicht.

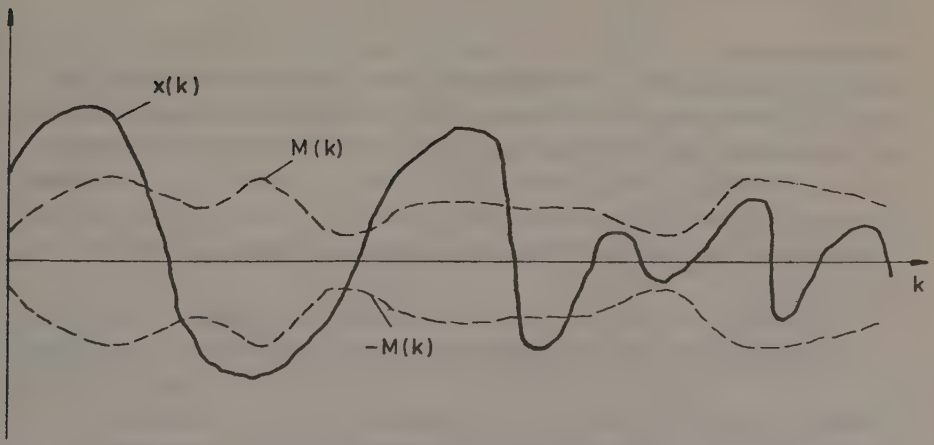



Bild 4.4. Veranschaulichung der Gleichung $|x(k)| \leq M(k)$ für $k\to\infty$

Bei Berücksichtigung von Gl.(4.39) für den Faktor r(k) folgt aus Gl.(4.118a)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\bar{e}^2(k)}{\rho \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta) + \gamma} = 0 . \tag{4.119}$$

Gl.(4.119) ist mit Gl.(A6.19) identisch. Nach Anhang A6.1 ergibt sich aus Gl.(4.119) unter den Voraussetzungen von Satz 4.2

$$\lim_{k\to\infty} \bar{e}^2(k) = 0 . \tag{4.120}$$

Unter der zusätzlichen Bedingung nach Gl.(4.39) für den Faktor r(k) kann also Gl.(4.118a) durch Gl.(4.120) ersetzt werden. Gl.(4.120) ist aber eine schärfere Bedingung als Gl.(4.118b) und ist somit als Spezialfall in Gl.(4.118b) enthalten. Gl.(4.118b) bedeutet, daß der vermehrte Fehler $\bar{e}$ für große Zeiten durch

$$|\bar{e}(k)| \leq \frac{2\,\bar{v}}{2 - r(k)\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \leq \frac{2\,\bar{v}}{\alpha} \quad \text{für } k\to\infty \tag{4.121}$$

beschränkt ist, wobei $\alpha$ die nach Gl.(A6.8) definierte positive Konstante ist.

Entsprechend Gl.(4.115) sind auch im gestörten System die Einstellwerte $\underline{\hat{p}}_i$ des adaptiven Mehrgrößenreglers für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ bei Verwendung des Einstellgesetzes nach Gln.(4.110a,b) beschränkt. Mit derselben Argumentation wie in Abschnitt 4.2 folgt hieraus, daß die Signale $\underline{x}_i$ betragsmäßig höchstens exponentiell anwachsen können. Für das in diesem Abschnitt nach Gln.(4.102) bis (4.105) ersatzweise betrachtete Eingrößenproblem ist damit zusätzlich die Bedingung

$$|\underline{x}(k-\delta)| \leq M_1\ \lambda^k \text{ für ein } M_1 > 0,\ \lambda > 0 \tag{4.122}$$

erfüllt. Nach Gl.(4.105) folgt dann mit Gl.(4.121) aus der Beschränktheit des Parameterfehlervektors $[p - \hat{p}(k)]$ nach Gl.(4.115), daß auch der vermehrte Fehler $\bar{e}$ betragsmäßig höchstens exponentiell anwachsen kann. Gerade dies wird aber durch Gl.(4.121) ausgeschlossen, so daß der vermehrte Fehler $\bar{e}$ für alle Zeiten beschränkt ist, d. h. es existiert eine Konstante $M_2 > 0$, so daß

$$|\bar{e}(k)| \leq M_2 \tag{4.123}$$

für alle k ist. Die Größe $M_2$ ist dabei nicht identisch mit der rechten Seite von Gl.(4.121), da Gl.(4.121) lediglich eine Abschätzung des dynamischen Verhaltens für $k \to \infty$ und nicht für alle k darstellt.

Aus der Beschränktheit des vermehrten Fehlers $\bar{e}$ ergibt sich bei beschränkter Störung v nach Gl.(4.105), daß auch das Skalarprodukt

$$|[\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-1)]^T \underline{x}(k-\delta) \leq M_3 \tag{4.124}$$

beschränkt ist. Da der Parameterfehlervektor nach Gl.(4.114) gegen einen *konstanten* Grenzwert konvergiert, folgt aus Gl.(4.120) unter zusätzlicher Berücksichtigung der Tatsache, daß der Signalvektor $\underline{x}$ entsprechend Gl.(4.122) nicht in endlicher Zeit divergiert, auch

$$|[\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-\nu)]^T \underline{x}(k-\delta)| \leq M_4 \text{ für beliebiges (ganzzahliges) } \nu, \tag{4.125}$$

d. h. jedes Skalarprodukt zwischen einem beliebigen zeitverschobenen Parameterfehlervektor $[\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-\nu)]$ und dem Signalvektor $\underline{x}(k-\delta)$ ist beschränkt. Das Signal h(k) nach Gl.(4.103) kann auch in der Form

$$h(k) = [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-1)]^T \underline{x}(k-\delta) - [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-\kappa)]^T \underline{x}(k-\delta) \tag{4.126}$$

dargestellt werden. Mit Gl.(4.125) folgt daraus, daß auch das Signal h(k) beschränkt ist, d. h. es existiert eine Konstante $M_5 > 0$, so daß

$$|h(k)| \leq M_5 \tag{4.127}$$

ist. Mit Gl.(4.125) und der Beschränktheit des vermehrten Fehlers $\bar{e}$ folgt aus Gl.(4.104), daß auch der gefilterte Fehler $e_M$ beschränkt ist.

Überträgt man die hier abgeleiteten Ergebnisse wieder auf das adaptive Mehrgrößensystem, so kommt man zu

Schlußfolgerung 4.6: Betrachtet wird das adaptive Mehrgrössensystem nach Abschnitt 4.2, bei dem das dynamische Verhalten der vermehrten Fehler $\bar{e}_i$ für $i \in \{1,\ldots,q\}$ nach Gl.(4.47) beschrieben wird. Für jede Störung $v_i$ sei eine Schranke $\bar{v}_i$ bekannt, so daß

$$|v_i(k)| \leq \bar{v}_i; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.128}$$

ist. Falls im Adaptionsalgorithmus das Einstellgesetz Gl.(4.48) für die Reglerparameter entsprechend Gl.(4.110a,b) durch die Beziehung

$$\hat{\underline{p}}_i(k) = \hat{\underline{p}}_i(k-1) + \underline{\phi}_i(k); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.129a}$$

mit

$$\underline{\phi}_i(k) = \begin{cases} = r_i(k)\ \underline{G}_i\ \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)\ \bar{e}_i(k) \text{ falls} \\ \qquad |\bar{e}_i(k)| > \dfrac{2\,\bar{v}_i}{2-r_i(k)\ \underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\ \underline{G}_i\ \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d} \\ = \underline{0} \text{ sonst} \end{cases}$$

$$i = 1, \ldots, q \tag{4.129b}$$

ersetzt wird, aber weiterhin Gln.(4.49) bis (4.55b) gelten, so konvergieren auch im gestörten System für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ die Reglerparameter $\hat{\underline{p}}_i$ gegen konstante Einstellwerte $\underline{p}_i^*$, die Norm der Parameterfehlervektoren

$$\|\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k)\|_{G_i^{-1}} = [\underline{p} - \hat{\underline{p}}_i(k)]^T\ \underline{G}_i^{-1}\ [\underline{p} - \hat{\underline{p}}_i(k)]$$

nimmt monoton (aber nicht streng monoton) ab, und die vermehrten und gefilterten Fehler $\bar{e}_i$ bzw. $e_{Mi}$ bleiben beschränkt.

Aus der Beschränktheit der gefilterten Fehler $e_{Mi}$ folgt nach Gl. (4.20) bei stabilem Parallelmodell, daß auch der natürliche Fehlervektor $\underline{e}$ beschränkt ist. Dies gilt nach Gl.(3.8) dann auch für den Ausgangsvektor $\underline{y}_E$ der erweiterten Regelstrecke. Mit derselben Argumentation wie im Abschnitt 4.2 bzw. Abschnitt 3.3.2 kann man jetzt die Beschränktheit aller im Regelkreis vorhandenen Signale beweisen, falls die Stabilitätsbedingung Gl.(3.7) durch das Korrekturnetzwerk erfüllt wird. (Um das Stellsignal berechnen zu können, muß natürlich auch weiterhin die Matrix $\hat{\underline{B}}_O(k-1) + \underline{B}'_{KO}$ zu jedem Zeitpunkt nichtsingulär sein (vgl. Gl.(4.60)).) Durch die Modifikation des Adaptionsgesetzes nach Gln.(4.129a,b) wird also die Stabilität auch des gestörten adaptiven Regelkreises garantiert.

Die hier vorgestellte Modifikation des Adaptionsgesetzes entspricht im wesentlichen der Modifikation, die Peterson und Narendra (1982) für kontinuierliche adaptive Regelsysteme vorgeschlagen haben. Die Grundidee ist dieselbe, allerdings ist die Bedingung nach Gl. (4.130b) im diskreten Fall etwas anders als im kontinuierlichen. Auch der hier durchgeführte Stabilitätsbeweis unterscheidet sich von dem von Narendra und Peterson. Als zusätzliche a priori-Information über die Störungen wird hier eine Abschätzung der Schranken $\bar{v}_i$ für $i \in \{1,\ldots,q\}$ verlangt, so daß stets Gl.(4.128) erfüllt ist. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist, daß diese Schranke $\bar{v}_i$ durchaus auch von den Streckenparametern abhängt. Angenommen, es können die Störungen

$$z_{yi}(z) = \frac{1}{A_i(z^{-1})}\, z_i(z); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.130}$$

an den Ausgängen der Regelstrecke gemessen bzw. abgeschätzt werden (vgl. Bild 2.3). Dann folgt mit Gl.(2.87d) bei Berücksichtigung der Diagonalstruktur der Matrix $\underline{R}_I(z^{-1})$ aus Gl.(4.19) bei rein deterministischen Störungen

$$v_i(z) = -(1-R_{Ii}(z^{-1})\, z^{-1}) A_i(z^{-1}) (1-z^{-1})^{n_z+1}\, z_{yi}(z);$$

$$i = 1, \ldots, q\,. \tag{4.131}$$

Bei unbekannten Streckenparametern sind für $i \in \{1,\ldots,q\}$ weder die Polynome $A_i(z^{-1})$ bekannt, noch können die Polynome $R_{Ii}(z^{-1})$ berechnet werden. Aus Gl.(4.131) ist ersichtlich, daß zur Abschätzung von $\bar{v}_i$ im allgemeinen eine a priori-Abschätzung der Streckenparameter vorliegen muß.

Die Konvergenz des natürlichen Fehlervektors $\underline{e}$ gegen Null kann bei dem hier beschriebenen Verfahren nicht mehr garantiert werden, sondern lediglich seine Beschränktheit ist gewährleistet. Dabei ist die Frage von Interesse, durch welche Schranken die natürlichen Fehler $e_i$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$) für große Zeiten $k \to \infty$ begrenzt werden. Es ist ja bereits gezeigt worden, daß auch im gestörten System alle Signale des adaptiven Regelkreises beschränkt bleiben, falls das modifizierte Einstellgesetz nach Gln.(4.129a,b) benutzt wird. Da diese Signale entsprechend Gln.(4.24) und (4.10) in den Signalvektoren $\underline{x}_i$ zusammengefaßt sind, bleiben also auch diese beschränkt. Aus der Bedingung, daß die Reglerparameter $\hat{p}_i$ entsprechend Gl. (4.114) mit

$$\lim_{k\to\infty} \hat{p}_i(k) = p_i^*; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.132}$$

gegen konstante Werte konvergieren, folgt nach Gl.(4.45) bei beschränkten Signalvektoren $\underline{x}_i$

$$\lim_{k\to\infty} h_i(k) = 0; \quad i = 1, \ldots, q\,. \tag{4.133}$$

Somit sind entsprechend Gl.(4.46) für große Zeiten $k \to \infty$ für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ das dynamische Verhalten des gefilterten Fehlers $e_{Mi}$ und des vermehrten Fehlers $\bar{e}_i$ identisch. Dies bedeutet insbesondere, daß

$$|e_{Mi}(k)| = |\bar{e}_i(k)| \text{ für } k\to\infty; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.134}$$

ist. Aus Gl.(4.121) folgt dann, daß für den adaptiven Mehrgrößenregler

$$|e_{Mi}(k)| \leq \frac{2\,\bar{v}_i}{2-r_i(k)\;\underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\;\underline{G}_i\;\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)}$$

$$\text{für } k\to\infty;\quad i=1,\ldots,q \tag{4.135}$$

garantiert wird. Wählt man für die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{2i}(k)$ entsprechend Gl.(4.52) eine untere Schranke $\lambda_{2i,min}$ mit

$$\frac{1}{2} < \lambda_{2i,min} \leq \lambda_{2i}(k) \leq \bar{\lambda}_{21} < \rho_i;\quad i=1,\ldots,q, \tag{4.136}$$

so ergibt sich mit Gl.(4.49) und Gl.(4.54) die Abschätzung

$$\lambda_{2i,min}\;\underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\;\underline{G}_i\;\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)$$

$$\leq \frac{1}{r_i(k)}$$

$$\leq \rho_i\;\underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\;\underline{G}_i\;\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)+\gamma_i;\quad i=1,\ldots,q$$

bzw.

$$r_i(k)\;\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)\;\underline{G}_i\;\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_{2i,min}};\quad i=1,\ldots,q, \tag{4.137}$$

so daß aus Gl.(4.135) folgt

$$|e_{Mi}(k)| \leq \frac{2\,\bar{v}_i}{2-\frac{1}{\lambda_{2i,min}}} \quad \text{für } k\to\infty;\quad i=1,\ldots,q. \tag{4.138}$$

Die natürlichen Fehler $e_i$ ergeben sich entsprechend Gl.(4.20) und der Diagonalität der Matrix $\underline{A}_M(z^{-1})$ nach Gl.(2.38a) durch die Rückfilterung

$$e_i(z) = \frac{1}{A_{Mi}(z^{-1})}\,e_{Mi}(z);\quad i=1,\ldots,q. \tag{4.139}$$

Bezeichnet man mit

$$g_{AMi}(k) = \mathfrak{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{A_{Mi}(z^{-1})}\right\}; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.140}$$

die Gewichtungsfolgen der Filter $1/A_{Mi}(z^{-1})$, so ergibt sich aus Gl.(4.139) im Zeitbereich die Faltungssumme

$$e_i(k) = \sum_{\nu=0}^{k} g_{AMi}(k-\nu)\, e_{Mi}(\nu); \quad i = 1, \ldots, q\,. \tag{4.141}$$

Da die linearen Filter $1/A_{Mi}(z^{-1})$ für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$ asymptotisch stabil sind (vgl. Gl.(2.38b)), folgt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |g_{AMi}(\nu)| = M_{gi} < \infty; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.142}$$

(Unbehauen (1983)). Nach dem Abklingen der Einschwingvorgänge erhält man für große Zeiten k aus Gl.(4.141) mit Gl.(4.138) und Gl.(4.142) für die natürlichen Fehler $e_i(k)$ die Abschätzungen

$$|e_i(k)| \leq M_{gi}\, \frac{2\,\bar{v}_i}{2 - \frac{1}{\lambda_{2i,\min}}} \quad \text{für } k \to \infty; \quad i = 1, \ldots, q\,. \tag{4.143}$$

Gl.(4.143) besagt, daß die Konvergenz der natürlichen Fehler $e_i$ gegen Null zwar nicht mehr garantiert werden kann, jedoch für $k \to \infty$ gewährleistet ist, daß sich jeder Fehler $e_i$ für $i \in \{1,\ldots,q\}$ innerhalb einer a priori abzuschätzenden Schranke bewegt, die von dem gewählten Parallelmodell, den Störungen und dem Adaptionsalgorithmus, d. h. insbesondere den gewählten unteren Schranken des zeitvarianten Gewichtungsfaktors $\lambda_{2i}(k)$ für $i \in \{1,\ldots,q\}$ abhängt. Dieser Sachverhalt ist in Bild 4.5 veranschaulicht.

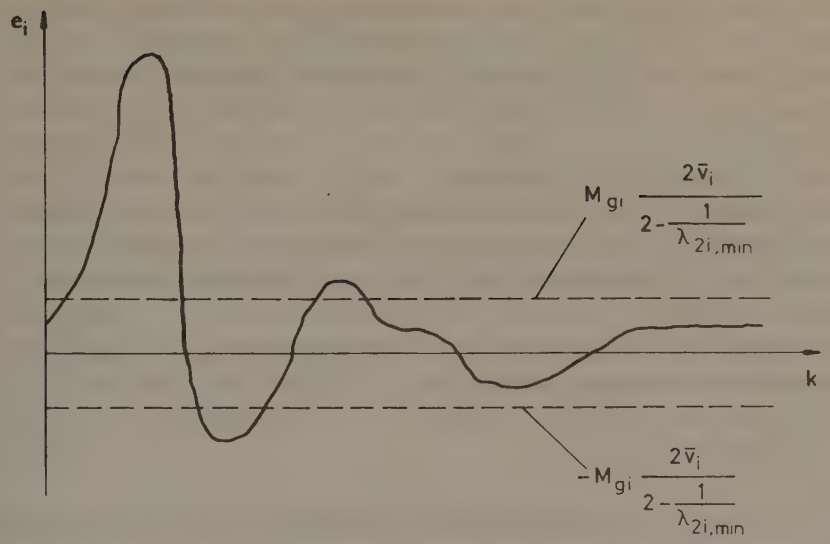



Bild 4.5. Qualitative Darstellung des zeitlichen Verlaufs der natürlichen Fehler $e_i$

### 4.4.3. Die zweite Modifikation des Adaptionsalgorithmus' unter Verwendung eines Reglers mit explizitem I-Verhalten

Vom praktischen Standpunkt aus besitzt das Adaptionsgesetz nach Gln. (4.129a,b) den Nachteil, daß die Einstellung der Reglerparameter bei sehr großen Störungen, d. h. $\bar{v}_i$ groß für $i \in \{1,\ldots,q\}$, nur selten für sehr große vermehrte $\bar{e}_i$ vorgenommen werden kann. In der Praxis sind aber die Auswirkungen der Störungen auf den natürlichen Fehlervektor vielfach in der gleichen Größenordnung, wenn nicht sogar grösser als die Auswirkungen eines fehlangepaßten Reglers. Das heißt, daß $\bar{v}_i$ a priori relativ groß abgeschätzt werden muß. (Denn ist die Bedingung $|v_i(k)| \leq \bar{v}_i$ nach Gl. (4.128) für ein $i \in \{1,\ldots,q\}$ verletzt, so ist die Stabilität des gesamten Regelungssystems nicht mehr garantiert.) Entsprechend Gln. (4.129a,b) wird dann die Adaption lange Zeit inaktiv sein. Die Anpassung des Reglers erfolgt langsam, und die garantierten Schranken für das stationäre Verhalten der natür-

lichen Fehler nach Gl.(4.143) sind relativ groß. Dies ist abhängig von den a priori abgeschätzten Schranken $\bar{v}_i$ der Störungen, aber unabhängig davon, ob eine Störung in dem realen System überhaupt auftritt oder nicht. Dies bedeutet, daß das in Abschnitt 4.4.2 beschriebene Verfahren zu großen Nachteilen führt, wenn die Amplituden der tatsächlich auftretenden Störungen a priori stark überschätzt werden. Um diesen Nachteil zu beseitigen und um eine schnelle Adaption zu ermöglichen, wird ein etwas anderer Algorithmus betrachtet, der zunächst nur für deterministische Störungen entworfen worden ist.

Es wird davon ausgegangen, daß die deterministischen Störungen die Bedingung nach Gl.(3.28b)

$$\lim_{k\to\infty} \underline{z}(k) = \underline{z}^* \, k^{n_z}$$

für eine a priori angenommene Zahl $n_z$ erfüllen, d. h. für $k\to\infty$ nimmt die Störung höchstens die Form eines Sprunges ($n_z = 0$), einer Rampe ($n_z = 1$), einer Parabel ($n_z = 2$) usw. an. Ferner soll im Grundregelkreis ein stationär genauer Regler mit explizitem $(n_z + 1)$-fachen I-Verhalten eingesetzt werden. Für den Fall, daß keine stochastischen Störungen auftreten ($\underline{\varepsilon}_I(z) \equiv \underline{0}$), gilt nach Gl.(4.19)

$$\underline{v}(z) = -(\underline{I} - \underline{R}_I(z^{-1})\, z^{-1})\, \underline{z}_I(z) \qquad (4.144)$$

mit

$$\underline{z}_I(z) = (1 - z^{-1})^{n_z+1}\, \underline{z}(z). \qquad (2.87d)$$

Wie bereits in Abschnitt 3.3.3 gezeigt, folgt aus Gl.(3.28b) mit dem Grenzwertsatz der $\mathcal{Z}$-Transformation

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \underline{z}_I(k) &= \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\, \underline{z}_I(z) \\ &= \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})^{n_z+2}\, \underline{z}(z) \\ &= \underline{0}\end{aligned}$$

(vgl. Gln.(3.29b) und (3.30b), so daß sich aus Gl.(4.144)

$$\lim_{k\to\infty} \underline{v}(k) = -\lim_{z\to 1}(\underline{I} - \underline{R}(z^{-1})\ z^{-1})(1-z^{-1})^{n_z+2}\ \underline{z}(z)$$

$$= \underline{0} \tag{4.145}$$

ergibt. Gl.(4.145) ist nun von großer Bedeutung. Sie besagt, daß jede Komponente $v_i$ für $i \in \{1,\ldots,q\}$ des Vektors $\underline{v}$ *unabhängig* von den geschätzten Parametern $\hat{p}_i$ des adaptiven Reglers gegen Null konvergiert, so daß für wachsende Zeiten k der Einfluß der Störung $v_i$ auf das dynamische Verhalten des vermehrten Fehlers nach Gl. (4.47) abnimmt. Dies ist einzig und allein eine Folge davon, daß ein Regler mit explizitem $(n_z+1)$-fachen I-Verhalten eingesetzt wird.

Nun kann das folgende Theorem angewandt werden:

Satz 4.7. Gegeben sei das durch die Gln.(4.102) bis (4.105) beschriebene System, für das zusätzlich

$$\lim_{k\to\infty} v(k) = 0 \tag{4.146}$$

gelte. Für jede beliebige positive Konstante $\xi > 0$ existiert dann eine endliche Zeit $k_\xi$, so daß

$$|v(k)| \leq \xi \text{ für alle } k \geq k_\xi \tag{4.147}$$

ist. Der Vektor $\underline{\hat{p}}$ soll nach der Beziehung

$$\underline{\hat{p}}(k) = \underline{\hat{p}}(k-1) + \underline{\phi}_\xi(k) \tag{4.148a}$$

mit

$$\underline{\phi}_\xi(k) = \begin{cases} = r(k)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)\ \bar{e}(k) \text{ falls} \\ \qquad |\bar{e}(k)| > \dfrac{2\xi}{2 - r(k)\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \\ = 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{4.148b}$$

verändert werden. Weiterhin sollen nach wie vor die Gleichungen (4.32) bis (4.36) und (4.41) bis (4.42b) erfüllt sein,und die Gewichtungsfaktoren $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ und $\lambda_3(k)$ sollen zusätzlich so gewählt werden, daß r(k) nach Gl.(4.32) beschränkt ist, d.h.

$$r(k) \leq r_{max} < \infty \tag{4.149}$$

für alle k.(Gl.(4.149) läßt sich z. B. immer durch die Wahl $\lambda_3(k) \geq 1/r_{max}$ erfüllen, da nach Gl.(4.32) gilt: $r(k) \leq 1/\lambda_3(k)$). Dann folgt

$$|\underline{p} - \underline{\hat{p}}(k)| \leq M_p < \infty \text{ für alle } k \geq 0 \tag{4.150}$$

$$\lim_{k\to\infty} \underline{\hat{p}}(k) = \underline{p}^* \tag{4.151}$$

$$[\underline{p} - \underline{\hat{p}}(k)]\ \underline{G}^{-1}\ [\underline{p} - \underline{\hat{p}}(k)] \leq [\underline{p} - \underline{\hat{p}}(k-1)]^T\ \underline{G}^{-1}\ [\underline{p} - \underline{\hat{p}}(k-1)]$$

$$\text{für alle } k \geq k_\xi \tag{4.152}$$

und bei Gültigkeit von Gln.(4.41) und (4.42)

$$|e_M(k)| \leq \frac{2\xi}{2 - r(k)\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \text{ für } k \to \infty . \tag{4.153}$$

Man erkennt, daß für $\xi = \bar{v}$ mit $\bar{v}$ nach Gl.(4.108) die Gleichungen (4.146a,b) mit den Gleichungen (4.110a,b) identisch sind und $k_\xi = 0$ ist. Der Vorteil, den Satz 4.7 bietet, besteht darin, daß unter der Voraussetzung nach Gl.(4.146) $\xi$ beliebig, also auch kleiner als $\bar{v}$ gewählt werden darf. Bevor jedoch hierauf eingegangen wird, soll Satz 4.7 bewiesen werden.

Mit der Ljapunow-Funktion nach Gl.(A6.1)

$$V(k) = [\underline{p} - \underline{\hat{p}}(k)]^T\ \underline{G}^{-1}\ [\underline{p} - \underline{\hat{p}}(k)]$$

ergibt sich wiederum der Gradient nach Gl.(4.106). Für $k \geq k_\xi$ ist dieser Gradient entsprechend Gln.(4.148a,b) unter Berücksichtigung von Gl.(4.147) garantiert nicht positiv; es gilt

$$\Delta V(k) < 0 \text{ für } k \geq k_\xi \text{ falls } r(k)\ \bar{e}^2(k) \neq 0$$

$$\textit{und } |\bar{e}(k)| > \frac{2\xi}{2 - r(k)\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \qquad (4.154a)$$

$$\Delta V(k) = 0 \text{ für } k \geq k_\xi \text{ falls } r(k)\ e^2(k) = 0$$

$$\textit{oder } |\bar{e}(k)| \leq \frac{2\xi}{2 - r(k)\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \qquad (4.154b)$$

Da V(k) also auch in diesem Fall für $k \geq k_\xi$ eine nach unten (durch $V_{min} = 0$) beschränkte, monoton fallende Funktionenfolge ist, existiert der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} V(k) = V^*, \qquad (4.155)$$

und es folgt

$$V(k) \leq V(k-1) \text{ für alle } k \geq k_\xi. \qquad (4.156)$$

Aus Gl.(4.155) ergibt sich mit Gl.(A6.1) und Gl.(A6.13) direkt Gl.(4.151). Gl.(4.156) ist mit Gl.(4.152) identisch. Aufgrund von Gl.(4.155) folgt ebenfalls

$$\lim_{k\to\infty} \Delta V(k) = 0. \qquad (4.157)$$

Mit den Gleichungen (4.154a,b) erhält man aus Gl.(4.157) bei Gültigkeit von Gln.(4.41) und (4.42) (analog zum Vorgehen in Abschnitt 4.4.2)

$$|\bar{e}(k)| \leq \frac{2\xi}{2 - r(k)\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \text{ für } k \to \infty. \qquad (4.158)$$

Da sich die Gleichungen für den vermehrten Fehler, Gl.(4.105), und für den gefilterten Fehler, Gl.(4.102), nur dadurch unterscheiden, daß einmal der Vektor $\hat{\underline{p}}$ zum Zeitpunkt k-1 und das andere Mal zum verschobenen Zeitpunkt k-κ benutzt wird, der Vektor $\bar{\underline{p}}$ aber für

$k \to \infty$ nach Gl.(4.151) gegen den *konstanten* Vektor $\underline{p}^*$ konvergiert, erhält man aus Gl.(4.158) wiederum direkt die Gültigkeit von Gl. (4.153).

Für $k < k_\xi$ kann $\Delta V(k)$ nach Gl.(4.106) für das Einstellgesetz nach Gln. (4.148a,b) positiv sein, da für $k < k_\xi$ $|v(k)| > \xi$ sein kann, d.h. für kleine Zeiten $k < k_\xi$ kann die Ljapunow-Funktion V(k) nach Gl.(A6.1), also die Norm $[\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)]\ \underline{G}^{-1}\ [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)]$ des Parameterfehlervektors, anwachsen. Damit der Parameterfehlervektor $[p - \hat{\underline{p}}(k)]$ entsprechend Gl.(4.150) für alle Zeiten beschränkt ist, muß nachgewiesen werden, daß die Ljapunow-Funktion V(k) nach Gl.(A6.1) beschränkt ist. Für $k \geq k_\xi$ ist dies entsprechend Gl.(4.156) sicher der Fall. Allerdings bleibt noch zu zeigen, daß V(k) nicht in dem endlichen Zeitintervall $k \in [0, k_\xi]$ divergiert. Da V(k) stets eine positive Funktion ist, nach unten also durch $V_{min} = 0$ beschränkt ist, kann V(k) - wenn überhaupt - nur nach $+\infty$ divergieren.

Nach der Definition

$$\Delta V(k) = V(k) - V(k-1)$$

des Gradienten der Ljapunow-Funktion kann V(k) als die Summe

$$V(k) = V(0) + \sum_{l=1}^{k} \Delta V(l) \tag{4.159}$$

dargestellt werden. V(k) kann somit innerhalb des Zeitintervalls $k \in [0, k_\xi]$ (bei beschränkten Anfangswerten) nur dann divergieren, falls

$$\sum_{l=0}^{k} \Delta V(l) \to +\infty \text{ für ein } k \in [0, k_\xi] \tag{4.160}$$

ist. Nun gilt aber nach Gl.(4.106)

$$\Delta V(k) \leq -\alpha\ r(k)\ \bar{e}^2(k) + 2r(k)\ \bar{v}\ \bar{e}(k) \text{ für alle } k \in [0, k_\xi], \tag{4.161}$$

wobei $\alpha$ die nach Gl.(A6.8) definierte Konstante und $\bar{v}$ die Schranke der Störung v(k) nach Gl.(4.108) ist. Die Funktion

$$f(\bar{e}(k)) = -\alpha\, r(k)\, \bar{e}^2(k) + r(k)\, \bar{v}\, e(k)$$

hat ein absolutes Maximum bei

$$f_{max}\,(\bar{e}(k)) = r(k)\, \frac{\bar{v}^2}{\alpha},$$

so daß aus Gl.(4.161) folgt

$$\Delta V(k) \leq r(k)\, \frac{\bar{v}^2}{\alpha} \text{ für alle } k \in [0, k_\xi]. \qquad (4.162)$$

Mit der Bedingung nach Gl.(4.149) für den Faktor r(k) erhält man somit

$$\Delta V(k) \leq r_{max}\, \frac{\bar{v}^2}{\alpha} \text{ für alle } k \in [0, k_\xi], \qquad (4.163)$$

d. h. $\Delta V(k)$ ist auf jeden Fall beschränkt. Für die Ljapunow-Funktion selbst ergibt sich nach Gl.(4.159) mit Gl.(4.163) die Abschätzung

$$V(k) \leq V(0) + k_\xi\, r_{max}\, \frac{\bar{v}^2}{\alpha} < \infty \text{ für alle } k \geq 0, \qquad (4.164)$$

da ja für $k \geq k_\xi$ der Gradient $\Delta V(k)$ - wie bereits vorher gezeigt - auf jeden Fall nicht positiv ist. Da V(k) entsprechend Gl.(4.164) beschränkt ist, folgt aus der Definition der Ljapunow-Funktion nach Gl.(A6.1) die Beschränktheit des Parameterfehlervektors nach Gl.(4.149). Damit ist der Beweis von Satz 4.7 abgeschlossen.

Überträgt man die Ergebnisse von Satz 4.7 wieder auf den Mehrgrößenfall, so kommt man zu

Schlußfolgerung 4.8. Betrachtet wird das adaptive Mehrgrößensystem nach Abschnitt 4.2, bei dem das dynamische Verhalten der vermehrten Fehler $\bar{e}_i$ für $i \in \{1,\ldots,q\}$ nach Gl.(4.47) beschrieben

wird. Von den Störungen $v_i(z)$ $(i \in \{1,\ldots,q\})$ wird angenommen, daß sie rein deterministischer Natur sind. A priori sei eine Zahl $n_z$ bekannt, für die Gl.(3.28b)

$$\lim_{k\to\infty} \underline{z}(k) = \underline{z}^* \, k^{n_z}$$

erfüllt ist; d. h. die stationäre Form des Störvektors $\underline{z}$ für $k\to\infty$ muß abgeschätzt werden. Der Grundregelkreis enthalte einen (stationär genauen) Regler mit explizitem $(n_z+1)$-fachen I-Verhalten, so daß entsprechend Gl.(4.145) gilt

$$\lim_{k\to\infty} v_i(k) = 0; \quad i = 1, \ldots, q \,. \tag{4.165}$$

Dann existieren für beliebige positive Konstanten

$$\xi_i > 0; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.166}$$

jeweils feste endliche Zeiten $k_{\xi i}$ $(i \in \{1,\ldots,q\})$, so daß

$$|v_i(k)| \leq \xi_i \text{ für alle } k \geq k_{\xi i}; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.167}$$

ist. Ersetzt man jetzt im Adaptionsalgorithmus nach Abschnitt 4.2, Gln.(4.48) bis (4.55b), das Einstellgesetz Gl.(4.48) für die Reglerparameter durch die Beziehung

$$\hat{\underline{p}}_i(k) = \hat{\underline{p}}_i(k-1) + \underline{\phi}_{\xi i}(k); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.168a}$$

mit

$$\underline{\phi}_{\xi i}(k) = \begin{cases} = r_i(k)\ \underline{G}_i\ \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)\ \bar{d}_i(k) \text{ falls} \\ \qquad |\bar{e}_i(k)| > \dfrac{2\xi_i}{2-r_i(k)\ \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)\ \underline{G}_i\ x_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)} \\ = \underline{0} \text{ sonst} \end{cases}$$

$$i = 1, \ldots, q \tag{4.168b}$$

und werden die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{1i}(k)$, $\lambda_{2i}(k)$ und $\lambda_{3i}(k)$ so gewählt, daß

$$r_i(k) \leq r_{i,max} < \infty \; ; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.169}$$

für alle k ist, so konvergieren für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ die Reglerparameter $\hat{\underline{p}}_i(k)$ für $k \to \infty$ gegen konstante Einstellwerte $\underline{p}_i^*$, die Parameterfehlervektoren $[\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k)]$ und damit auch die Reglerparameter $\hat{\underline{p}}_i(k)$ sind beschränkt, und unter den Voraussetzungen von Satz 4.2 gilt

$$|e_{Mi}(k)| \leq \frac{2\xi_i}{2 - r_i(k)\; \underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\; \underline{G}_i\; \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)}$$

$$\text{für } k \to \infty; \quad i = 1, \ldots, q \,. \tag{4.170}$$

Aus der Beschränktheit der Reglerparameter $\hat{\underline{p}}_i$ für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$ folgt wiederum, daß die Signale $\underline{x}_i$ betragsmäßig höchstens exponentiell anwachsen können. Daraus ergibt sich mit Gl.(4.26), daß auch die gefilterten Fehler $e_{Mi}$ betragsmäßig höchstens exponentiell anwachsen können. Gerade dies wird aber durch Gl.(4.170) ausgeschlossen, so daß die Fehlersignale $e_{Mi}$ für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ für alle Zeiten k beschränkt sind. Hieraus erhält man bei stabilem Parallelmodell entsprechend Gl.(4.20) die Beschränktheit des natürlichen Fehlervektors $\underline{e}$ und - mit derselben Argumentation wie im Abschnitt 4.2 bzw. Abschnitt 3.3.2 - bei stabilem Korrekturnetzwerk und bei Gültigkeit von Gl.(3.7) die Beschränktheit aller im Regelkreis vorkommenden Signale. Das gesamte adaptive Regelungssystem ist bei Verwendung eines stationär genauen Reglers also auch mit dem Einstellgesetz nach Gln.(4.168a,b) bei Einwirkung rein deterministischer Störungen garantiert stabil. Dabei muß lediglich die stationäre Form der Störungen a priori abgeschätzt werden, um die notwendige Anzahl $n_z+1$ der freien Integratoren bestimmen zu können. Im Unterschied zu dem Verfahren nach Abschnitt 4.4.2 ist die Stabilität aber völlig unabhängig von den Amplituden der Signale $v_i(k)$ gewährleistet.

Die Erweiterung des Algorithmus nach Schlußfolgerung 4.8 auf gemischte Störungen, d. h. Störungen deterministischer und stochastischer Natur, ist einfach durchzuführen. Angenommen, für die stochastischen Störungen gelte

$$|\mathfrak{Z}^{-1}\{C_i(z^{-1})\,\varepsilon_{Ii}(z)\}| \leq M_{C\varepsilon i};\quad i=1,\ldots,q. \tag{4.171}$$

Dann gilt nach Gl.(4.19) bei Verwendung eines stationär genauen Reglers unter Berücksichtigung von Gl.(3.30b)

$$|v_i(k)| \leq M_{C\varepsilon i} \text{ für } k\to\infty;\quad i=1,\ldots,q. \tag{4.172}$$

Wählt man nun die Größen

$$\xi_i > M_{C\varepsilon i};\quad i=1,\ldots,q, \tag{4.173}$$

so existieren weiterhin feste endliche Zeiten $k_{\xi i}$, so daß Gl.(4.167) erfüllt ist. Ersetzt man demnach Gl.(4.166) durch Gl.(4.173), so bleiben alle Aussagen von Schlußfolgerung 4.8 auch für gemischte Störungen gültig. Allerdings kann der Einfluß stochastischer Störungen wirkungsvoller durch geeignete Wahl der Gewichtungsfaktoren $\lambda_{2i}(k)$ gedämpft werden, wie später noch gezeigt wird.

Wählt man die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{2i}(k)$ entsprechend Gl.(4.136) stets größer als $\lambda_{2i,min}$, so folgt - analog zu den Überlegungen aus Abschnitt 4.4.2 - mit Gln.(4.139) bis (4.142) aus Gl.(4.170)

$$|e_i(k)| \leq M_{gi}\,\frac{2\,\xi_i}{2-\frac{1}{\lambda_{2i,min}}} \text{ für } k\to\infty;\quad i=1,\ldots,q. \tag{4.174}$$

Der Vergleich von Gl.(4.174) mit Gl.(4.143) macht einen weiteren Vorteil des hier beschriebenen Verfahrens mit dem Einstellgesetz nach Gln.(4.168a,b) unter Verwendung eines stationär genauen Reglers mit $(n_z+1)$-fachem I-Verhalten im Grundregelkreis gegenüber dem Einstellgesetz nach Gln.(4.131a,b) deutlich. Nach Gl.(4.174) können bei reinen deterministischen Störungen die Schranken, durch die das stationäre Verhalten der natürlichen Fehler $e_i$ begrenzt wird, bei Verwendung eines Reglers mit explizitem $(n_z+1)$-fachen

I-Verhalten durch Wahl der Konstanten $\xi_i$ *beliebig klein* gemacht werden und hängen nicht mehr von den Größen $\bar{v}_i$ nach Gl.(4.108), d. h. den Amplituden der Störungen ab.

Allerdings hat dieses Verfahren auch einen Nachteil. Dieser besteht darin, daß für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ die Norm $[\underline{p}_i-\hat{\underline{p}}_i(k)]\,\underline{G}_i^{-1}\,[\underline{p}_i-\hat{\underline{p}}_i(k)]$ der Parameterfehlervektoren nicht mehr monoton abnimmt, sondern in dem Zeitintervall $k \in [0, k_{\xi i}]$ zunehmen kann, da - wie bereits vorher diskutiert - im Zeitintervall $k \in [0, k_\xi]$ für das ersatzweise betrachtete Eingrößenproblem nach Gln.(4.102) bis (4.105) der Gradient der Ljapunow-Funktion nach Gl.(A6.1) indefinit ist. Entsprechend Gl.(4.164) erhält man mit der Definition der Ljapunow-Funktion V(k) nach Gl.(A6.1) im Mehrgrößenfall für die Normen der Parameterfehlervektoren

$$\|\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k)\|_{\underline{G}_i^{-1}} = [\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k)]^T\, \underline{G}_i^{-1}\, [\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k)] \qquad (4.61)$$

die Beziehung

$$\|\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k)\|_{\underline{G}_i^{-1}} \leq \|\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(0)\|_{\underline{G}_i^{-1}} + k_{\xi i}\, r_{i,\max}\, \frac{\bar{v}_i^2}{\alpha_i}\,;$$

$$i = 1, \ldots, q\,, \qquad (4.175)$$

wobei für $\alpha_i$ entsprechend Gl.(A6.8) gilt

$$0 < \alpha_i \leq 2 - r_i(k)\; \underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\; \underline{G}_i\; \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i);\; i = 1, \ldots, q\,. \qquad (4.176)$$

Wählt man für die Gewichtsfaktoren $\lambda_{2i}(k)$ eine minimale Schranke nach Gl.(4.136)

$$\frac{1}{2} < \lambda_{2i,\min} \leq \lambda_{2i}(k) \leq \bar{\lambda}_{2i} < \rho_i;\quad i = 1, \ldots, q\,,$$

so folgt aus Gl.(4.176) unter Berücksichtigung von Gl.(4.137)

$$\alpha_i \geq 2 - \frac{1}{\lambda_{2i,\min}}\,;\quad i = 1, \ldots, q\,. \qquad (4.177)$$

Setzt man auch für die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{3i}(k)$ nach Gl.(4.53) eine minimale Schranke mit

$$0 < \lambda_{3i,min} \leq \lambda_{3i}(k) \leq \bar{\lambda}_{3i} < \gamma_i; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.178}$$

an, so ergibt sich aus Gl.(4.54) die Abschätzung

$$r_{i,max} \leq \frac{1}{\lambda_{3i,min}}; \quad i = 1, \ldots, q. \tag{4.179}$$

Mit Gl.(4.177) und Gl.(4.179) erhält man aus Gl.(4.175)

$$\|\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k)\|_{G_i^{-1}} \leq \|\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(0)\|_{G_i^{-1}} + \frac{k_{\xi i}\, \bar{v}_i^2}{\lambda_{3i,min}\,(2 - \frac{1}{\lambda_{2i,min}})}; \quad i = 1, \ldots, q. \tag{4.180}$$

Gl.(4.180) gibt eine grobe Abschätzung an, um wieviel die Normen der Parameterfehlervektoren maximal anwachsen können. Diese Normen stellen ein Maß für die Anpassung des Reglers dar. Gl.(4.180) zeigt, daß bei dem stationär genauen Regler das mögliche Anwachsen dieser Norm, d. h. die mögliche Fehleinstellung des Reglers, dadurch reduziert werden kann, daß die minimalen Schranken für die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{2i}(k)$ und $\lambda_{3i}(k)$ groß gewählt werden. Dies bedeutet, daß die Faktoren $r_i(k)$ nach Gln.(4.49) und (4.54) relativ klein sind, da für die sinnvolle Wahl

$$\rho_i > \bar{\lambda}_{2i} > \lambda_{2i,min}; \quad i = 1, \ldots, q$$

und

$$\gamma_i > \bar{\lambda}_{3i} > \lambda_{3i,min}; \quad i = 1, \ldots, q$$

(vgl. Gln.(4.136) und (4.178)) stets gilt

$$r_i(k) \leq \frac{1}{\lambda_{2i,min}\, \underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\, \underline{G}_i\, \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) + \lambda_{3i,min}}; \quad i = 1, \ldots, q. \tag{4.181}$$

Nach dem Einstellgesetz Gln.(4.168a,b) hat dies zur Folge, daß die Adaption langsam erfolgt. Anschaulich könnte man diesen Sachverhalt als "vorsichtige" Adaption bezeichnen. Da der Gradient $\Delta V(k)$ der Ljapunow-Funktion für das ersatzweise betrachtete Eingrößenproblem entsprechend Gln.(4.154a,b) für $k \geq k_\xi$ garantiert nicht positiv ist, ergibt sich, daß für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ die Norm des Parameterfehlervektors $\|\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k)\|_{G_i^{-1}}$ nur in dem Zeitintervall $k \in [0, k_{\xi i}]$ wachsen kann. Obwohl $k_{\xi i}$ a priori bei unbekannten Störungen nicht bestimmt werden kann, wird nach Gl.(4.167) $k_{\xi i}$ um so kleiner, je größer $\xi_i$ gewählt wird. Für

$$\xi_i = \bar{v}_i; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.182}$$

ist Gl.(4.167) mit Gl.(4.128) identisch, und $k_{\xi i}$ ist gleich Null. Dann nimmt die Norm der Parameterfehlervektoren wieder monoton ab (vgl. Schlußfolgerung 4.6). Allerdings bedeuten größere Konstanten $\xi_i$ auch, daß die Anpassung entsprechend Gl.(4.168a,b) im Mittel längere Zeiten inaktiv ist und die für das stationäre Verhalten der natürlichen Fehler garantierten Schranken nach Gl.(4.174) größer werden.

Im folgenden sollen die Ergebnisse noch einmal anschaulich zusammengefaßt werden.

Das in diesem Abschnitt nach Gln.(4.168a,b) modifizierte Einstellgesetz für die Reglerparameter garantiert auch bei (deterministischen) Störungen die Stabilität des gesamten adaptiven Regelungssystems, wenn ein stationär genauer Regler mit explizitem I-Verhalten verwendet wird. Um die Anzahl der notwendigen freien Integratoren bestimmen zu können, muß a priori eine Abschätzung der stationären Form der einwirkenden Störungen $\underline{z}$ durchgeführt werden; eine Abschätzung der Störamplituden ist nicht erforderlich. Die stationäre Form der Störung kann aber häufig in der Praxis durch physikalische Überlegungen a priori einfach abgeschätzt werden. Mit der Wahl der Konstanten $\xi_i$ hat man entsprechend Gln.(4.168a,b) die Möglichkeit, die Ansprechschwelle der Adaption festzulegen. Will

man garantieren, daß die natürlichen Fehler für $k \to \infty$ betragsmäßig klein werden, so müssen diese Konstanten entsprechend Gl.(4.174) klein gewählt werden, d. h. die Adaption muß "empfindlich" ausgelegt werden. Um eine schnelle Konvergenz der natürlichen Fehler in das durch die Schranken nach Gl.(4.174) festgelegte Gebiet zu ermöglichen, dürfen die Faktoren $r_i(k)$ nicht zu klein werden, da sonst - bildlich gesprochen - die Adaption nach Gl.(4.168a,b) zu träge wird. Kleine Konstanten $\xi_i$ und große Faktoren $r_i(k)$ bedeuten aber auch, daß die Zeiten $k_{\xi i}$ nach Gl.(4.167) groß werden und die minimalen Bewertungsfaktoren $\lambda_{2i,min}$ und $\lambda_{3i,min}$ klein gewählt werden müssen, so daß die Normen $\|\underline{p}-\underline{\hat{p}}_i(k)\|_{G_i^{-1}}$ der Parameterfehlervektoren entsprechend Gl.(4.180) stark anwachsen können (allerdings nicht notwendigerweise anwachsen müssen). Ein "empfindlicher" und schneller Adaptionsalgorithmus kann somit zu einer weiteren Fehlanpassung des Reglers führen. Es ist ein interessantes Faktum, daß eine schnelle Konvergenz der natürlichen Fehler im gestörten System durchaus mit einer zusätzlichen Fehlanpassung, d. h. einem "Detuning" des Reglers verbunden sein kann. Dies wurde auch durch Simulationen bestätigt. Ist man nur am dynamischen Verhalten der natürlichen Fehler, d. h. letzten Endes der Regelgrößen, interessiert und will die Information über die eingestellten Reglerparameter $\underline{\hat{p}}_i$ nicht für eine Analyse des dynamischen Verhaltens der Regelstrecke verwenden, so spielt dieses Detuning bei reinem Störverhalten keine Rolle. Für eine Änderung der Sollwerte kann jedoch bei fehlangepaßtem Regler das tatsächliche von dem erwarteten Führungsverhalten z. T. erheblich abweichen, wobei in der praktischen Anwendung ein möglicherweise stark erhöhtes Überschwingen der Regelgrößen besonders gefürchtet wird. Abhilfe schafft man hier dadurch, daß man vor einer Sollwertänderung das gesamte adaptive Regelungssystem durch einen zusätzlichen externen Testsignalvektor, der auf den Signalvektor $\underline{w}_v$ nach Bild 4.1 aufgeschaltet wird, permanent anregt (vgl. Abschnitt 4.3.1). Dazu dürfen die einzelnen Komponenten des Testsignalvektors nicht untereinander korreliert sein. Dann wird entsprechend den Ausführungen aus Abschnitt 4.3.1 die Norm des Parameterfehlervektors wiederum monoton abnehmen und für kleine Konstanten $\xi_i$ auch kleine Werte annehmen.

Da die adaptive Regelung mit dem Einstellgesetz nach Gln.(4.168a,b) unter der Voraussetzung nach Gl.(4.165) für *beliebig kleine* Konstanten $\xi_i > 0$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$ stabil ist, läßt sich vermuten, daß die Stabilität auch für $\xi_i = 0$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$ erhalten bleibt, vorausgesetzt es wird ein stationär genauer Regler mit explizitem $(n_z+1)$-fachen I-Verhalten im Grundregelkreis verwendet. Dies läuft dann wieder auf den Adaptionsalgorithmus nach Abschnitt 4.2, Gln.(4.48) bis (4.55b), hinaus. In Simulationen und Experimenten (vgl. Abschnitt 5) hat sich gezeigt, daß dies auch tatsächlich der Fall ist und die natürlichen Fehler $e_i$ dann auch im gestörten System gegen Null konvergieren. Mathematisch kann mit den hier verwendeten Methoden die Stabilität jedoch nicht mehr nachgewiesen werden, da für $\xi_i = 0$ die Zeiten $k_{\xi i}$ nach Gl.(4.167) nicht existieren bzw. unendlich groß werden. Für $k_\xi \to \infty$ kann aber nicht mehr die Beschränktheit, geschweige denn die Konvergenz der Ljapunow-Funktion V(k) nach Gl.(A6.1) für das im Satz 4.7 ersatzweise betrachtete Eingrößenproblem gezeigt werden (vgl. hierzu z. B. Gl.(4.164)). Gerade dies ist aber ein Kernpunkt in dem Beweis von Satz 4.7. Trotz dieser theoretischen Schwierigkeit ist der Einsatz eines stationär genauen Reglers mit explizitem $(n_z+1)$-fachen I-Verhalten mit der Wahl $\xi_i = 0$ für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$ in der Praxis attraktiv, da die Erfahrung gezeigt hat, daß dann der natürliche Fehlervektor auch im gestörten System gegen Null konvergiert.

### 4.4.4. Die Biasschätzung und einige weitere Modifikationen

#### 4.4.4.1. Die Biasschätzung

Die Biasschätzung wird häufig im Zusammenhang mit dem sogenannten "Self tuning"-Regler vorgeschlagen (Koivo (1980), Åström (1980)). Hierbei wird angenommen, daß die deterministischen Störungen $\underline{z}$ während der Adaptionsphase konstant sind. D. h. es wird angenommen, daß sich die Störungen $\underline{z}$ nur sprungförmig ändern und die einzelnen Sprünge in Zeitabständen aufeinander folgen, die größer sind als die für die Adaption der Reglerparameter benötigte Zeit. Ist der Störvektor $\underline{z}$ unbekannt, aber konstant, so kann er wie ein unbekann-

ter Parameter der Regelstrecke geschätzt werden, und der Schätzwert kann im Stellgesetz berücksichtigt werden. Bei der Biasschätzung handelt es sich im Prinzip um nichts anderes als um eine adaptive Störgrößenaufschaltung. Dabei wird im allgemeinen ein Regler ohne explizites I-Verhalten ($n_z = -1$) eingesetzt, so daß entsprechend Gl.(2.87d)

$$\underline{z}_I(z) = \underline{z}(z) \tag{4.183}$$

ist. Im folgenden wird der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß keine stochastischen Störungen auftreten, d. h. $\underline{\varepsilon}_I(z) \equiv \underline{0}$.

Sind die Störungen $\underline{z}$ konstant und wird ein Regler ohne explizites I-Verhalten eingesetzt, so ist auch bei reinen deterministischen Störungen, d. h. für $\underline{\varepsilon}(z) = 0$, entsprechend Gl.(4.19) und Gl.(4.183) der Störvektor $\underline{v}$ konstant; es gilt dann

$$\underline{v} = -(\underline{I} - \underline{R}(1))\ \underline{z}\ . \tag{4.184}$$

Modifiziert man das implizite Stellgesetz Gl.(4.14) des adaptiven Reglers zu der Form

$$(\hat{\underline{B}}_0(k-1) + \underline{B}'_{K0})\ \underline{u}_{dI}(k) = \underline{\mu}(k) + \hat{\underline{\bar{P}}}(k-1)\ \underline{\bar{x}}(k) + \hat{\underline{v}}(k-1), \tag{4.185}$$

wobei $\hat{\underline{v}}$ einen Schätzwert für den unbekannten, aber konstanten Störvektor $\underline{v}$ darstellt, so ergibt sich aus Gl.(4.18) nach Addition des nach Gl.(4.185) identisch verschwindenden Ausdrucks

$$(\hat{\underline{B}}_0(k-1) + \underline{B}'_{K0})\ \underline{u}_{dI}(k) - \underline{\mu}(k) - \hat{\underline{\bar{P}}}(k-1)\ \underline{\bar{x}}(k) - \hat{\underline{v}}(k-1) \equiv 0$$

die Beziehung

$$\mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{e}_M(z)\} =$$

$$= -(\underline{B}_0 - \hat{\underline{B}}_0(k-1)\ \underline{u}_{dI}(k) + (\underline{\bar{P}} - \hat{\underline{\bar{P}}}(k-1))\ \underline{\bar{x}}(k) + \underline{v} - \hat{\underline{v}}(k-1)\ . \tag{4.186}$$

Obwohl hier der Regler ohne explizites I-Verhalten, also für $n_z = -1$, betrachtet wird, bei dem nach Gl.(3.33) der Signalvektor $\underline{u}_{dI}$ mit dem Signalvektor $\underline{u}_d$ identisch ist, wird aus formalen Gründen weiterhin das Formelzeichen $\underline{u}_{dI}$ verwendet. In Gl.(4.186) ist berücksichtigt, daß der Vektor $\underline{v}$ als konstant angenommen wird und somit die Zeitverschiebung der Störung $\underline{v}(z)$ in Gl.(4.18), d. h. die Multiplikation mit den inversen Schrittverzögerungen $z^{\bar{d}_e}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})$, keine Rolle spielt.

Mit den Parametervektoren

$$\underline{p}_{vi}^T = (\underline{p}_i^T,\ v_i);\ i = 1, \ldots, q, \tag{4.187}$$

deren Schätzwerten

$$\hat{\underline{p}}_{vi}^T(k) = (\hat{\underline{p}}_i^T(k),\ \hat{v}_i(k));\ i = 1, \ldots, q \tag{4.188}$$

und den Signalvektoren

$$\underline{x}_{vi}^T(k) = (\underline{x}_i^T(k),\ 1);\ i = 1, \ldots, q \tag{4.189}$$

erhält man aus Gl.(4.186) unter Berücksichtigung der Struktur der Matrizen $\overline{\underline{P}}$ nach Gl.(4.9) und $\hat{\overline{\underline{P}}}(k)$ nach Gl.(4.15) und der Definitionen der Vektoren $\underline{p}_i$, $\hat{\underline{p}}_i(k)$ und $\underline{x}_i(k)$ nach Gln.(4.22) bis (4.24) für jeden gefilterten Fehler $e_{Mi}$ die Beziehung

$$e_{Mi}(k) = [\underline{p}_{vi} - \hat{\underline{p}}_{vi}(k-\bar{d}_e-d_i^a-1)]^T\ \underline{x}_{vi}(k-\bar{d}_e-d_i^a);\ i = 1, \ldots, q\,. \tag{4.190}$$

Nach Addition der Signale

$$h_i(k) = [\hat{\underline{p}}_{vi}(k-\bar{d}_e-d_i^a-1) - \hat{\underline{p}}_{vi}(k-1)]^T\ \underline{x}_{vi}(k-d_e-d_i^a);\ i = 1, \ldots, q \tag{4.191}$$

ergibt sich aus Gl.(4.186) für die vermehrten Fehler

$$\bar{e}_i(k) = e_{Mi}(k) + h_i(k);\quad i = 1, \ldots, q \tag{4.46}$$

das dynamische Verhalten

$$\bar{e}_i(k) = [\underline{p}_{vi} - \hat{\underline{p}}_{vi}(k-1)]^T \underline{x}_{vi}(k-\bar{d}_e-d_i^a); \quad i = 1, \ldots, q. \quad (4.192)$$

Gl.(4.192) entspricht für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ Gl.(4.30) aus Satz 4.1. Wendet man nun den Adaptionsalgorithmus Gln.(4.48) bis (4.55b) sinngemäß an, in dem formal für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ die Vektoren $\hat{\underline{p}}_i$ und $\underline{x}_i$ durch $\hat{\underline{p}}_{vi}$ und $\underline{x}_{vi}$ ersetzt werden, so garantiert dieser Adaptionsalgorithmus entsprechend Satz 4.1 und Satz 4.2 die Konvergenz der vermehrten Fehler. Mit derselben Argumentation wie in Abschnitt 4.2 läßt sich daraus wiederum die Konvergenz der natürlichen Fehler $e_i$ und die Beschränktheit aller im Regelkreis vorhandenen Signale beweisen.

Treten neben den hier diskutierten sprungförmigen deterministischen Störungen auch stochastische Störungen auf, so werden mit dem hier beschriebenen Verfahren die Mittelwerte, d. h. die deterministischen Anteile der gemischten Störungen, geschätzt und im Stellgesetz berücksichtigt.

#### 4.4.4.2. Das Verfahren von Kreisselmeier und Narendra

Während bei allen bisher beschriebenen Verfahren a priori Annahmen über die einwirkenden Störungen gemacht werden, werden bei dem Verfahren von Kreisselmeier und Narendra (1982) a priori Annahmen über die Parameter der Regelstrecke verwendet, von denen wiederum die exakten Parameter $\underline{p}_i$ des Reglers abhängen. Bei diesem Verfahren wird davon ausgegangen, daß für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ eine obere Schranke $M_{Ni}$ für eine beliebige Norm der unbekannten Parameter $\underline{p}_i$ abgeschätzt werden kann, so daß für alle möglichen Parameterkombinationen der Regelstrecke

$$\|\underline{p}_i\| \leq M_{Ni}; \quad i = 1, \ldots, q \quad (4.193)$$

ist. Das Adaptionsgesetz wird nun so modifiziert, daß auch für die Schätzwerte

$$\|\hat{\underline{p}}_i(k)\| \leq M_{Ni}; \quad i = 1, \ldots, q \qquad (4.194)$$

garantiert wird und unter der Voraussetzung, daß die exakten Parameter Gl.(4.193) erfüllen, auch die Stabilität des gesamten Regelungssystems gewährleistet ist. Bei verschiedenen Anwendungen, insbesondere bei Mehrgrößensystemen, kann es praktisch jedoch schwierig sein, die maximale Norm der Parameter nach Gl.(4.193) günstig abzuschätzen. Allerdings wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit das Verfahren von Kreisselmeier und Narendra nicht näher untersucht, so daß eine detaillierte Beurteilung des Verfahrens an dieser Stelle nicht möglich ist.

#### 4.4.4.3. Die Verwendung von inkrementellen Schätzmodellen

Die Modifikation, die Sebakhy und Salama (1982) für gestörte adaptive Regelsysteme vorschlagen, bezieht sich auf sogenannte "indirekte" adaptive Regelungen, bei denen explizit die Parameter der Regelstrecke geschätzt werden und mit diesen Schätzwerten die Reglerparameter berechnet werden. Bei dem in Abschnitt 4.2 vorgestellten Verfahren werden hingegen direkt die Reglerparameter geschätzt (die natürlich nach Anhang A8 implizit Schätzwerte für die Parameter der Regelstrecke enthalten). Solche Verfahren bezeichnet man als "direkte" adaptive Regelung. Da indirekte adaptive Regler stets explizit ein Modell der Regelstrecke identifizieren, bezeichnet man sie auch als "explizite adaptive Algorithmen", während man die direkten adaptiven Regler als "implizite adaptive Algorithmen" klassifiziert (Åström (1980)). Sebakhy und Salama schlagen nun vor, bei konstanten Störungen die Regelstrecke nicht direkt mit den Ein- und Ausgangssignalen, sondern mit gefilterten Ein- und Ausgangssignalen zu identifizieren. Die verwendeten Filter haben dabei differenzierendes Verhalten, so daß am Ausgang dieser Filter der konstante Störterm verschwindet. Für diskrete Regelstrecken erreicht man dies dadurch, indem man nicht direkt von der Beschreibung nach Gl.(2.21), sondern von einem inkrementellen Streckenmodell

$$\underline{A}(z^{-1})\ \underline{\Delta y}(z) = \underline{D}_a(z^{-1}\ \underline{B}(z^{-1})\ \underline{D}_e(z^{-1}\ \underline{\Delta u}(z) + \underline{C}(z^{-1})\ \underline{\Delta \varepsilon}(z) + \underline{\Delta z}(z) \qquad (4.195)$$

mit

$$\underline{\Delta y}(z) = \mathcal{Z}\{\underline{y}(k) - \underline{y}(k-1)\} \tag{4.196a}$$

$$\underline{\Delta u}(z) = \mathcal{Z}\{\underline{u}(k) - \underline{u}(k-1)\} \tag{4.196b}$$

$$\underline{\Delta \varepsilon}(z) = \mathcal{Z}\{\underline{\varepsilon}(k) - \underline{\varepsilon}(k-1)\} \tag{4.196c}$$

$$\underline{\Delta z}(z) = \mathcal{Z}\{\underline{z}(k) - \underline{z}(k-1)\} \tag{4.196d}$$

ausgeht. Gl.(4.195) ergibt sich aus Gl.(2.21) durch Multiplikation mit $1-z^{-1}$, d. h. physikalisch durch Filterung der Ein- und Ausgangssignale mit dem diskreten "differentiellen" Filter

$$F_D(z^{-1}) = 1-z^{-1}. \tag{4.197}$$

Für konstante Störungen ist

$$\underline{\Delta z}(z) = \mathcal{Z}\{\underline{z}(k) - \underline{z}(k-1)\} = \underline{0}, \tag{4.198}$$

so daß diese bei dem inkrementellen Streckenmodell nach Gl.(4.195) keine Rolle mehr spielen.

Schmid (1979) hat ebenfalls diese Methode angewendet. Dabei stellte sich heraus, daß mit den inkrementellen Ein- und Ausgangssignalen $\underline{\Delta u}$ und $\underline{\Delta y}$ die Identifikation der Regelstrecke länger dauert, d. h. die Schätzwerte für die Streckenparameter konvergieren langsam. Da die Hochpaßfilterung nach Gl.(4.196a bis d) für die Identifikation eine starke Unterdrückung der niederfrequenten Anteile und eine völlige Unterdrückung der Gleichanteile der Stell- und Regelgrößen mit sich bringt, sind mit diesem Verfahren häufig die niederfrequenten Anteile des dynamischen Verhaltens einschließlich des (statischen) Verstärkungsfaktors bzw. im Mehrgrößenfall der Verstärkungsmatrix der Regelstrecke nur schwer zu identifizieren. Ferner bedeutet die Hochpaßfilterung der Regelgrößen, daß zwar die konstanten Störungen, die man als Bias auffassen kann, sich nicht und niederfrequente (deterministische) Störungen sich kaum auf die Schätzung auswirken, daß aber die stochastischen Störungen,

die im allgemeinen hohe Frequenzanteile besitzen, einen um so stärkeren Einfluß haben. Auch in diesem Fall gilt die klassische Regel, daß in stark stochastisch gestörten Systemen eine Differenzierung bzw. Hochpaßfilterung der Regelgrößen auf jeden Fall vermieden werden sollte.

Aufgrund der hier dargestellten Nachteile wurde das Verfahren von Sebakhy und Salama in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt, obwohl sich die Grundidee einfach auf das direkte Verfahren nach Abschnitt 4.2 übertragen läßt. Hierzu wird von der Gleichung des natürlichen Fehlervektors

$$\mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{e}(z)\} = \underline{\mu}(k) - (\underline{B}_O + \underline{B}'_{KO})\ \underline{u}_{dI}(k) + \overline{\underline{P}}\ \overline{\underline{x}}(k) + \mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \underline{v}(z)\} \qquad (4.18)$$

ausgegangen. Aus dieser Gleichung ergibt sich unter Berücksichtigung von

$$\underline{e}_M(z) = \underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{e}(z) \qquad (4.20)$$

die inkrementelle Darstellung

$$\mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \mathcal{Z}\{\underline{\Delta e}_M(k)\}\} =$$

$$= \underline{\Delta\mu}(k) + (\underline{B}_O + \underline{B}'_{KO})\ \underline{\Delta u}_{dI}(k) + \overline{\underline{P}}\ \underline{\Delta\overline{x}}(k) + \mathcal{Z}^{-1}\{z^{-d_e}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \mathcal{Z}\{\underline{\Delta v}(k)\}\} \qquad (4.199)$$

mit

$$\underline{\Delta e}_M(k) = \underline{e}(k) - \underline{e}(k-1) \qquad (4.200a)$$

$$\underline{\Delta\mu}(k) = \underline{\mu}(k) - \underline{\mu}(k-1) \qquad (4.200b)$$

$$\underline{\Delta u}_{dI}(k) = \underline{u}_{dI}(k) - \underline{u}_{dI}(k-1) \qquad (4.200c)$$

$$\underline{\Delta\overline{x}}(k) = \underline{x}(k) - \underline{x}(k-1) \qquad (4.200d)$$

und

$$\underline{\Delta v}(k) = \underline{v}(k) - \underline{v}(k-1). \tag{4.200e}$$

Legt man nun dem Stellgesetz die implizite Beziehung

$$(\hat{\underline{B}}_O(k-1) + \underline{B}'_{KO})\ \underline{\Delta u}_{dI}(k) = \underline{\Delta \mu}(k) + \hat{\underline{\bar{P}}}(k-1)\ \underline{\Delta \bar{x}}(k) \tag{4.201}$$

zugrunde, so erhält man nach Addition des identisch verschwindenden Terms

$$(\hat{\underline{B}}_O(k-1) + \underline{B}'_{KO})\ \underline{\Delta u}_{dI}(k) - \underline{\Delta \mu}(k) - \hat{\underline{\bar{P}}}(k-1)\ \underline{\bar{x}}(k) \equiv 0$$

auf der rechten Seite von Gl.(4.199)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \mathcal{Z}\{\underline{\Delta e}_M(k)\}\} = \\ = -(\underline{B}_O - \hat{\underline{B}}_O(k-1))\ \underline{\Delta u}_{dI}(k) \\ + (\underline{\bar{P}} - \hat{\underline{\bar{P}}}(k-1))\ \underline{\Delta \bar{x}}(k) \\ + \mathcal{Z}^{-1}\{z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\ \mathcal{Z}\{\underline{\Delta v}(k)\}\}. \end{aligned} \tag{4.202}$$

Mit den Definitionen nach Gl.(4.22) bis (4.24) ergibt sich hieraus wieder für jede Komponente $\Delta e_{Mi}$ des inkrementellen gefilterten Fehlervektors $\underline{\Delta e}_M$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \Delta e_{Mi} = [\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a-1]^T\ \underline{\Delta x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) \\ + \Delta v_i(k);\quad i = 1, \ldots, q, \end{aligned} \tag{4.203}$$

wobei

$$\underline{\Delta x}_i(k) = \underline{x}_i(k) - \underline{x}_i(k-1);\quad i = 1, \ldots, q \tag{4.204}$$

ist.

Die Schätzwerte $\hat{\underline{p}}$ in Gl.(4.203) haben aufgrund der Verwendung inkrementeller Signale bei sonst gleichen Bedingungen ein anderes dynamisches Verhalten als jene, die in Gl.(4.26) benutzt werden. Strenggenommen müßten für die Schätzwerte $\hat{\underline{B}}_0$ und $\hat{\underline{\bar{P}}}$ in Gl.(4.201) und damit auch für Vektoren $\hat{\underline{p}}_i$ in Gl.(4.203) andere Formelzeichen verwendet werden als für die Schätzwerte in Gl.(4.14) und Gl.(4.26). Da aber die exakten Werte $\underline{B}_0$, $\underline{\bar{P}}$ und $\underline{p}_i$ für beide Fälle gleich sind und dieselbe physikalische Bedeutung haben, wird auf eine unterschiedliche Bezeichnungsweise bewußt verzichtet.

Definiert man nun die Signale

$$h_i^{\Delta}(k) = [\hat{\underline{p}}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a-1) - \hat{\underline{p}}_i(k-1)]^T \, \underline{\Delta x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a); \quad i = 1, \ldots, q, \tag{4.205}$$

so erhält man die vermehrten Fehler

$$\begin{aligned} \bar{e}_i^{\Delta}(k) &= \Delta e_{Mi}(k) + h_i^{\Delta}(k) \\ &= [\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k-1)]^T \, \underline{\Delta x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) \\ &\quad + \Delta v_i(k); \quad i = 1, \ldots, q. \end{aligned} \tag{4.206}$$

Für konstante Störungen ist

$$\Delta v_i(k) = v_i(k) - v_i(k-1) = 0; \quad i = 1, \ldots, q, \tag{4.207}$$

so daß für diesen Fall Gl.(4.206) für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ formal mit Gl.(4.30) aus Satz 4.1 identisch ist. Wendet man nun den Adaptionsalgorithmus nach Abschnitt 4.2, Gln.(4.48) bis (4.55b), sinngemäß auf das durch Gl.(4.206) beschriebene Schätzproblem an, indem man $\underline{x}_i$ durch $\underline{\Delta x}_i$ und $\bar{e}_i$ durch $\bar{e}_i^{\Delta}$ ersetzt, so ist für konstante Störungen, also $\Delta v_i(k) = 0$, für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$ entsprechend Satz 4.1, Gl.(4.44), und Satz 4.2 die Konvergenz der Signale $\bar{e}_i^{\Delta}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} [e_i^{\Delta}(k)]^2 = 0; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.208}$$

garantiert. Gemäß der Argumentation aus Abschnitt 4.2 folgt aus Gl.(4.208) auch, daß

$$\lim_{k\to\infty} \Delta e_{Mi}(k) = 0; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.209}$$

ist, woraus sich nach Gl.(4.20) - bei stabilem Parallelmodell - direkt die Konvergenz des inkrementellen natürlichen Fehlervektors

$$\underline{\Delta e}(k) = \underline{e}(k) - \underline{e}(k-1) \tag{4.210}$$

mit

$$\lim_{k\to\infty} \underline{\Delta e}(k) = \underline{0} \tag{4.211}$$

ergibt. Mit Gl.(4.211) kann man aber ohne zusätzliche Annahmen weder die Konvergenz des natürlichen Fehlervektors $\underline{e}$ nach Gl. (4.59) garantieren, noch läßt sich seine Beschränktheit nachweisen.

Sind die Störungen $v_i(k)$ nicht konstant, sondern sprungförmig, wobei sie sich jedoch nicht während eines Anpassungsvorganges [1] ändern, so besteht $\Delta v_i(k)$ nur aus einem kurzen Impuls zum Zeitpunkt $k = 0$. Dieser Impuls kann als Änderung der Anfangsbedingungen $\hat{\underline{p}}_i(0)$ der Reglerparameter interpretiert werden. Da der Adaptionsalgorithmus nach Gln.(4.48) bis (4.55b) entsprechend Satz 4.1 unabhängig von den Anfangsbedingungen $\hat{\underline{p}}_i(0)$ die Konvergenz der vermehrten Fehler garantiert, bleiben die bisherigen Überlegungen auch in diesem Fall gültig. Insofern werden bei diesem Verfahren an die Störungen die gleichen Bedingungen gestellt wie bei der Biasschätzung.

---

[1] Unter "Anpassungsvorgang" wird hier die Zeitspanne verstanden, die verstreicht, bis die geschätzten Parameter $\hat{\underline{p}}_i$ praktisch ihre konstanten Endwerte $\underline{p}_i^*$ erreicht haben.

Hat man aus Gl.(4.201) das Signal $\underline{\Delta u}_{dI}$ berechnet, so erhält man das für Gl.(3.37) benötigte Signal $\underline{u}_{dI}$ wieder durch die Rückfilterung

$$\underline{u}_{dI}(z) = \frac{\underline{\Delta u}_{dI}(z)}{F_D(z^{-1})} = \frac{\underline{\Delta u}_{dI}(z)}{1-z^{-1}} \cdot \tag{4.212}$$

Aus Gl.(4.212) und Gl.(4.201) erkennt man, daß im angepaßten Zustand, d. h. für

$$\hat{\underline{B}}_O(k) \equiv \underline{B}_O$$

$$\overline{\underline{P}}(k) \equiv \underline{P},$$

das Filter $F_D(z^{-1})$ nach Gl.(4.197) keine Rolle spielt, da dann wieder

$$(\underline{B}_O + \underline{B}'_{KO})\ \underline{u}_{dI}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}\ (\underline{\Delta u}(z) + \overline{\underline{P}}\ \underline{\Delta \bar{x}}(z))$$

$$= \underline{u}(z) + \overline{\underline{P}}\ \underline{\bar{x}}(z) \tag{4.213}$$

gilt.

## 4.4.5. Reduzierung des Einflusses stochastischer Störungen durch Einsatz variabler Gewichtungsfaktoren

Der Einfluß stochastischer Störungen kann qualitativ einfach anhand eines Beispiels aufgezeigt werden. Betrachtet wird hierzu das Eingrößensystem erster Ordnung

$$y(k) = u(k-1) + a\ y(k-1) + \varepsilon(k), \tag{4.214}$$

wobei $\varepsilon$ weißes Rauschen darstellt und nur der Parameter a unbekannt ist. Da hier nur der Einfluß der stochastischen Störung $\varepsilon$ abgeschätzt werden soll, wird angenommen, daß der Sollwert w und damit auch das Ausgangssignal $y_M$ des Parallelmodells gleich Null sind. Ferner soll kein Korrekturnetzwerk verwendet werden, so daß

auch $y_K$ gleich Null ist. Dann gilt für den natürlichen Fehler e nach Gl.(3.8)

$$e(k) = -y(k). \tag{4.215}$$

Als Stellgesetz wird

$$u(k) = \hat{p}(k)\, y(k) \tag{4.216}$$

angesetzt. Setzt man Gl.(4.216) in Gl.(4.214) ein, so erhält man

$$y(k) = [a + \hat{p}(k-1)]\, y(k-1) + \varepsilon(k). \tag{4.217}$$

Damit ergibt sich nach Gl.(4.215) für den natürlichen Fehler

$$e(k) = [-a-\hat{p}(k-1)]\, y(k-1) - \varepsilon(k). \tag{4.218}$$

Mit

$$p = -a \tag{4.219}$$

$$x(k) = y(k) \tag{4.220}$$

und

$$v(k) = -\varepsilon(k) \tag{4.221}$$

hat Gl.(4.218) direkt die Form von Gl.(4.47), so daß in diesem Beispiel der vermehrte Fehler $\bar{e}$ und der natürliche Fehler e gleich sind, d. h.

$$e(k) = \bar{e}(k). \tag{4.222}$$

Dies ist eine Folge davon, daß Gl.(4.214) ein System mit der Schrittverzögerung $d = 1$ beschreibt und im Stellgesetz nach Gl. (4.216) der Schätzwert $\hat{p}$ zum Zeitpunkt k und nicht, wie im impliziten Stellgesetz nach Gl.(4.14), zum Zeitpunkt k-1 benutzt wird. Dies bedeutet keine wesentliche Änderung der dynamischen Eigen-

schaften des adaptiven Regelsystems (Schmid (1979)) und hat nur den Sinn, für die grundsätzlichen Überlegungen in diesem Abschnitt die mathematische Behandlung zu vereinfachen.

Wendet man nun für die Schätzung des Reglerparameters $\hat{p}$ Gl.(4.48) an, so erhält man unter Berücksichtigung von Gl.(4.220) und Gl.(4.222) und der Tatsache, daß die Schrittverzögerung $d = d^a + \bar{d}_e$ nach Gl.(4.214) gleich Eins ist,

$$\hat{p}(k) = \hat{p}(k-1) + r(k)\ g\ y(k-1)\ e(k) \tag{4.223}$$

mit

$$g > 0\,. \tag{4.224}$$

Mit Gl.(4.223) ergibt sich aus Gl.(4.217)

$$y(k) = [a + \hat{p}(k-2) + r(k-1)\ g\ y(k-2)\ e(k-1)]\ y(k-1) + \varepsilon(k)\,. \tag{4.225}$$

Gl.(4.225) kann für $k \geq 0$ auch in der Form

$$y(k) = [a + \hat{p}(-2) + g \sum_{\nu=0}^{k-1} r(\nu)\ y(\nu-1)\ e(\nu)]\ y(k-1) + \varepsilon(k) \tag{4.226}$$

dargestellt werden.

Für den angepaßten Zustand

$$\hat{p}(k) \equiv p = -a \tag{4.227}$$

stellt Gl.(4.216) das Stellgesetz des Minimum-Varianz-Reglers dar, da dann entsprechend Gl.(4.217)

$$y(k) = \varepsilon(k) \tag{4.228}$$

ist. Nimmt man nun an, daß sich der Regler für $k < 0$ im angepaßten Zustand befunden hat, daß also insbesondere

$$\hat{p}(-2) = -a \tag{4.229}$$

gilt, so folgt aus Gl.(4.226) unter zusätzlicher Berücksichtigung von Gl.(4.215) für das dynamische Verhalten der Regelgröße

$$y(k) = -g \sum_{\nu=0}^{k-1} r(\nu)\, y(\nu-1)\, y(\nu)\, y(k-1) + \varepsilon(k). \tag{4.230}$$

Für die Varianz der Regelgröße erhält man daraus die Beziehung

$$E\{y^2(k)\} = g^2\, E\{[\sum_{\nu=0}^{k-1} r(\nu)\, y(\nu-1)\, y(\nu)\, y(k-1)]^2\} + E\{\varepsilon^2(k)\}, \tag{4.231}$$

da das weiße Rauschsignal zum Zeitpunkt k mit allen vergangenen Signalen nicht korreliert ist, so daß

$$E\{\varepsilon(k)\, y(k-l)\} = 0 \text{ für } l > 0$$

gilt. Gl.(4.231) zeigt, daß die Varianz der Regelgröße durch Einschalten der Adaption im angepaßten Zustand erhöht wird, und zwar um so stärker, je größer der Bewertungsfaktor g und der Faktor r(k) sind.

Für das hier betrachtete Beispiel ist die Varianz der Regelgröße y gleich der Varianz des natürlichen Fehlers e, da als Sollwert w = 0 angenommen wurde. Im Fall gemischten Stör- und Führungsverhaltens führen die durchgeführten beispielhaften Betrachtungen zu der Vermutung, daß im angepaßten Zustand die Adaption die Varianz des natürlichen Fehlers erhöht. Dies ist auch in ausführlichen Simulationen mit Eingrößensystemen unter Verwendung von "fixed gain"-Verfahren (vgl. Abschnitt 4.3.2) bestätigt worden (vgl. z. B. Hahn (1978)). Dabei wurde auch bestätigt, daß die Varianz des natürlichen Fehlers bzw. im Mehrgrößenfall der natürlichen Fehler um so größer wird, je größer die Eigenwerte der Bewertungsmatrizen $\underline{G}_i$ nach Gl.(4.50) gewählt werden und je größer im Mittel die Faktoren $r_i(k)$ sind.

Die bisherigen Überlegungen gingen davon aus, daß sich der Regler zum Anfangszeitpunkt im angepaßten Zustand befindet. Dann ist es am günstigsten, die Adaption ganz abzuschalten. Ist jedoch der Regler zum Anfangszeitpunkt fehlangepaßt, so dürfen, um eine möglichst schnelle Konvergenz der natürlichen Fehler zu ermöglichen, die Eigenwerte der positiv definiten Bewertungsmatrizen $\underline{G}_i$ "nicht zu klein" gewählt werden,und die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{1i}(k)$, $\lambda_{2i}(k)$ und $\lambda_{3i}(k)$ sollten so bestimmt werden, daß auch die Faktoren $r_i(k)$ "nicht zu klein" werden, da andernfalls die Einstellung der Reglerparameter nach Gl.(4.48) zu träge reagiert (vgl. hierzu z. B. Schmid (1979)). Der Begriff "nicht zu klein" ist natürlich relativ. Dennoch besteht qualitativ das Problem, daß für eine schnelle Konvergenz der natürlichen Fehler bzw. ihrer Erwartungswerte die Eigenwerte der zeitabhängigen effektiven Bewertungsmatrizen $r_i(k)\cdot\underline{G}_i$ (vgl. Gl.(4.48)) relativ groß gewählt werden müssen, während für eine möglichst kleine Varianz des natürlichen Fehlers im angepaßten Zustand die Adaption ausgeschaltet werden muß, was formal durch $r_i(k) \equiv 0$ beschrieben werden kann.

Dieses Problem wird bei dem Standardalgorithmus der stochastischen Approximation durch die Wahl

$$\lambda_{1i}(k) \equiv 1, \quad \lambda_{2i}(k) \equiv \overline{\lambda}_{2i} > \frac{1}{2}, \quad \lambda_{3i}(k) \equiv 0; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.232}$$

gelöst. Zusätzlich wird dabei Gl.(4.54) durch

$$r_i(k) = r_i^*(k); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.233}$$

ersetzt, d. h. die Faktoren $r_i(k)$ werden nicht durch eine echt positive Schranke nach unten begrenzt. In diesem Fall ist entsprechend Gl.(4.49) $r_i(k)$ immer echt kleiner als $r_i(k-1)$; es gilt

$$0 \leq r_i(k) < r_i(k-1); \quad i = 1, \ldots, q, \tag{4.234}$$

so daß $r_i(k)$ eine streng monoton abnehmende, nach unten beschränkte Folge ist. Gl.(4.234) bedeutet, daß

$$\lim_{k\to\infty} r_i(k) = 0; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.235}$$

ist. Wählt man nun für den fehlangepaßten Regler die Anfangswerte $r_i(-1)$ groß, so wird zunächst eine schnelle Anpassung stattfinden. Für $k\to\infty$ wird dann jedoch entsprechend Gl.(4.235) die Adaption ausgeschaltet. Dadurch wird wiederum für große Zeiten auch die Varianz der Regelgrößen verkleinert. Goodwin et al. (1981) haben mit Hilfe des Martingale-Theorems nachgewiesen, daß der Algorithmus der stochastischen Approximation auch bei Einwirkung stochastischer Störungen die Konvergenz der Erwartungswerte der natürlichen Fehler gegen Null mit Wahrscheinlichkeit 1 gewährleistet, und gleichzeitig für $k\to\infty$ ihre Varianzen $E\{e_i^2(k)\}$ für $i \in \{1,\ldots,q\}$ jene Werte annehmen, die sich ergeben, wenn die Schätzwerte $\hat{p}_i$ der Reglerparameter durch ihre exakten Werte $p_i$ ersetzt werden und die Adaption ausgeschaltet wird. D. h. die Varianzen werden durch die Adaption zumindest für $k\to\infty$ nicht mehr zusätzlich erhöht. Allerdings hat der Algorithmus der stochastischen Approximation mit der Wahl der Gewichtungsfaktoren nach Gl.(4.232) den Nachteil, daß sich der Regler nur *einmalig* an eine Regelstrecke mit unbekannten Parametern anpaßt. Für $k\to\infty$ findet keine Einstellung der Reglerparameter mehr statt, da die Faktoren $r_i(k)$ gegen Null konvergieren. Praktisch werden diese Faktoren sehr schnell abgebaut. Somit ist dieser Algorithmus gut für die adaptive Regelung von Regelstrecken mit unbekannten, aber für alle Zeiten konstanten Parametern geeignet. Für Regelstrecken mit sich ändernden Parametern kann er jedoch nicht angewandt werden.

Um bei Parameteränderungen der Regelstrecke einerseits eine möglichst schnelle Konvergenz der natürlichen Fehler bei fehlangepaßtem Regler zu erzielen, andererseits aber auch bei angepaßtem bzw. näherungsweise angepaßtem Regler die Varianz der natürlichen Fehler klein zu halten, werden in der vorliegenden Arbeit variable Gewichtungsfaktoren vorgeschlagen. Als meßbare Signale, anhand derer entschieden werden kann, ob der Regler fehlangepaßt oder näherungsweise angepaßt ist, stehen die natürlichen Fehler $e_i$ zur Verfügung. Es ist deshalb sinnvoll, die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{1i}(k)$,

$\lambda_{2i}(k)$ und $\lambda_{3i}(k)$ von den natürlichen Fehlern $e_i(k)$ abhängig zu machen. Dazu werden die Funktionen

$$f_{\lambda 1,i}(k) = \overline{\lambda}_{1i}\ [1 - \frac{g_{\lambda 1,i}}{N_i} \sum_{l=0}^{N_i-1} e_i^2(k-l)];\ i = 1, \ldots, q \quad (4.236a)$$

$$f_{\lambda 2,i}(k) = \overline{\lambda}_{2i}\ [1 - \frac{g_{\lambda 2,i}}{N_i} \sum_{l=0}^{N_i-1} e_i^2(k-l)];\ i = 1, \ldots, q \quad (4.236b)$$

$$f_{\lambda 3,i}(k) = \overline{\lambda}_{3i}\ [1 - \frac{g_{\lambda 3,i}}{N_i} \sum_{l=0}^{N_i-1} e_i^2(k-l)];\ i = 1, \ldots, q \quad (4.236c)$$

definiert. Dabei sind

$$g_{\lambda 1,i} > 0;\quad i = 1, \ldots, q$$

$$g_{\lambda 2,i} > 0;\quad i = 1, \ldots, q$$

$$g_{\lambda 3,i} > 0;\quad i = 1, \ldots, q$$

$$N_i = 1, 2, 3, \ldots;\quad i = 1, \ldots, q$$

frei wählbar. Die Gewichtungsfaktoren werden nun nach der Vorschrift

$$\lambda_{1i}(k) = \begin{cases} f_{\lambda 1,i}(k) \text{ falls } f_{\lambda 1,i}(k) \geq \lambda_{1i,min} \geq 0 \\ \lambda_{1i,min} \geq 0 \text{ sonst;} \end{cases} \quad i = 1, \ldots, q \quad (4.237a)$$

$$\lambda_{2i}(k) = \begin{cases} f_{\lambda 2,i}(k) \text{ falls } f_{\lambda 2,i}(k) \geq \lambda_{2i,min} > \frac{1}{2} \\ \lambda_{2i,min} > \frac{1}{2} \text{ sonst;} \end{cases} \quad i = 1, \ldots, q \quad (4.237b)$$

$$\lambda_{3i}(k) = \begin{cases} f_{\lambda 3,i}(k) \text{ falls } f_{\lambda 3,i}(k) \geq \lambda_{3i,min} \geq 0 \\ \lambda_{3i,min} \geq 0 \text{ sonst;} \end{cases} \quad i = 1, \ldots q \quad (4.237c)$$

eingestellt. Dies macht folgenden Sinn: Im näherungsweise angepaßten Zustand ist $\sum_{l=0}^{N_i-1} e_i^2(k-l)$ klein, so daß die Gewichtungsfaktoren ihre Maximalwerte

$$\lambda_{1i}(k) \approx \overline{\lambda}_{1i}; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.238a}$$

$$\lambda_{2i}(k) \approx \overline{\lambda}_{2i}; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.238b}$$

$$\lambda_{3i}(k) \approx \overline{\lambda}_{3i}; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.238c}$$

annehmen. Damit werden die Faktoren $r_i(k)$ entsprechend Gln.(4.49) und (4.54) relativ klein, vorausgesetzt die Konstanten $\rho_i$ und $\gamma_i$ nach Gln.(4.55a,b) sind sehr groß gewählt worden. Dies bedeutet entsprechend den vorangegangenen Überlegungen, daß auch die Varianz der natürlichen Fehler klein gehalten wird. Ist der Regler fehlangepaßt, so ist $\sum_{l=0}^{N_i-1} e_i^2(k-l)$ groß, und die Gewichtungsfaktoren nehmen ihre minimalen Werte an. Daraus ergibt sich, daß die Faktoren $r_i(k)$ im Mittel große Werte annehmen und die Einstellung der Reglerparameter nach Gl.(4.48) beschleunigt wird, was wiederum eine schnelle Konvergenz der natürlichen Fehler zur Folge hat.

Der Grund, warum die Funktionen $f_{\lambda 1,i}(k)$, $f_{\lambda 2,i}(k)$ und $f_{\lambda 3,i}(k)$ für $i \in \{1,\ldots,q\}$ gerade von den Termen $\frac{1}{N_i} \sum_{l=0}^{N_i-1} e_i^2(k-l)$ abhängig gemacht werden, ergibt sich aus einer heuristischen Überlegung. Da die Frage, ob der Regler angepaßt oder fehlangepaßt ist, nur vom Betrag und nicht vom Vorzeichen der natürlichen Fehler abhängt, liegt es nahe, die Gewichtungsfaktoren mit dem Quadrat der natürlichen Fehler zu verändern. Es ist klar, daß für eine Aussage über die Anpassung des Reglers die Verläufe der natürlichen Fehler über einen gewissen Zeitraum beobachtet werden müssen und nicht nur die Augenblickswerte ausreichen. Genau dies drücken die Terme $\frac{1}{N_i} \sum_{l=0}^{N_i-1} e_i^2(k-l)$ aus, die die quadratischen Mittelwerte der natürlichen Fehler über $N_i$ Abtastschritte darstellen.

Es bleibt die Frage, wie die freien Entwurfsparameter $N_i$, $\lambda_{1i,min}$, $\lambda_{2i,min}$, $\lambda_{3i,min}$, $\overline{\lambda}_{1i}$, $\overline{\lambda}_{2i}$, $\overline{\lambda}_{3i}$, $g_{\lambda 1,i}$, $g_{\lambda 2,i}$ und $g_{\lambda 3,i}$ für jedes $i \in 1,\ldots,q$ gewählt werden sollen. Hierzu können einige Erfahrungsregeln angegeben werden. Die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{3i}(k)$ haben einen geringen Einfluß auf die Dynamik des Adaptionsvorganges. Sie haben im wesentlichen die Aufgabe, die Faktoren $r_i(k)$ zu begrenzen, da nach Gl.(4.49) und Gl.(4.54) gilt

$$r_i(k) \leq \frac{1}{\lambda_{3i}(k)} \; ; \quad i = 1, \ldots, q \, , \tag{4.239}$$

falls $\gamma_i > \lambda_{3i}(k)$ ist. Daher können sie als konstant angesetzt werden, d. h.

$$\lambda_{3i}(k) = \overline{\lambda}_{3i} \; ; \quad i = 1, \ldots, q \, . \tag{4.240}$$

Für kleine natürliche Fehler, bei denen Gl.(4.238a) und Gl.(4.238b) erfüllt sind, erhält man mit

$$\overline{\lambda}_{1i} = 1 \; ; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.241}$$

aus dem allgemeinen Adaptionsalgorithmus nach Gl.(4.48) bis Gl. (4.55b) einen zu dem von Goodwin et al. (1981) analysierten Verfahren der stochastischen Approximation sehr ähnlichen Algorithmus, vorausgesetzt, die Konstanten $\rho_i$ und $\gamma_i$ nach Gln.(4.55a,b) werden sehr groß gewählt. Für große natürliche Fehler ergibt sich mit der Wahl

$$\lambda_{1i,min} = 0 \; ; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.242}$$

ein "fixed gain"-Verfahren, wie es z. B. von Ionescu und Monopoli (1977) und Schmid (1979) vorgeschlagen wird (vgl. Abschnitt 4.3.2). Durch die Wahl variabler Gewichtungsfaktoren $\lambda_{1i}(k)$ und $\lambda_{2i}(k)$ nach Gl.(4.237a) und Gl.(4.237b) können also die Vorteile des Verfahrens der stochastischen Approximation und der "fixed gain"-Verfahren miteinander verbunden werden, wenn die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{1i}(k)$ zwischen den Grenzen nach Gl.(4.241) und Gl.(4.242)

verändert werden. Diese Vorteile sind bei dem Verfahren der stochastischen Approximation die Verringerung der Varianz der natürlichen Fehler in einer stochastisch gestörten Umwelt, bei den "fixed gain"-Verfahren eine gute Konvergenz in einer deterministischen Umwelt und die Fähigkeit, den Regler an eine Veränderung der Strekkenparameter stets anpassen zu können (Schmid (1979)).

Bei der Wahl der freien Entwurfsparameter des Adaptionsalgorithmus' nach Gln.(4.48) bis (4.55b) geht man nun zweckmäßigerweise folgendermaßen vor: Die Größen $\lambda_{2i,min}$ und $\bar{\lambda}_{3i}$ und die Elemente der Bewertungsmatrizen $\underline{G}_i$ nach Gl.(4.50) werden für ein "fixed gain"-Verfahren, also für

$$\lambda_{1i,min} = 0 \; ; \quad i = 1, \ldots, q$$

ausgelegt. Aus Simulationsversuchen hat sich ergeben, daß für viele Fälle brauchbare Werte im Bereich

$$\frac{1}{2} < \lambda_{2i,min} \leq 1; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.243}$$

$$0 < \bar{\lambda}_{3i} \leq 1; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.244}$$

liegen. Die Matrizen $\underline{G}_i$ sollten, um den Aufwand so gering wie möglich zu halten, als Diagonalmatrizen

$$\underline{G}_i = \text{diag}\{g_{\mu\mu,i}\}; \quad \mu = 1, \ldots, \dim(\underline{p}_i); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.245}$$

gewählt werden. Richtlinien für die Wahl der Diagonalelemente findet man bei Schmid (1979). Größenordnungsmäßig sollten die Werte für diese Elemente im Bereich zwischen 1 und $10^3$ liegen. Die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{1i}(k)$ und $\lambda_{2i}(k)$ werden nun nach Gl.(4.237a) und Gl.(4.237b) unter Berücksichtigung von Gln.(4.241), (4.242) und (4.243) variiert, wobei sich

$$\bar{\lambda}_{2i} = 10 \ldots 100 \cdot \lambda_{2i,min}; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.246}$$

als günstige Wahl herausgestellt hat. Die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{3i}(k)$ haben - wie bereits vorher erwähnt - keine große Bedeutung für das dynamische Verhalten der natürlichen Fehler und können nach Gl.(4.240) als Konstanten gewählt werden. Während die Wahl des "Zeitfensters" $N_i$ für $i \in \{1,\ldots,q\}$ unkritisch ist und es sich gezeigt hat, daß es ausreicht, die natürlichen Fehler nur über wenige Abtastschritte in Gln.(4.236a,b) (und evtl. Gl.(4.236c)) aufzusummieren, haben die Faktoren $g_{\lambda 1,i}$ und $g_{\lambda 2,i}$ (und evtl. $g_{\lambda 3,i}$) einen großen Einfluß, da sie gewissermaßen die Empfindlichkeit festlegen, mit der sich die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{1i}(k)$ und $\lambda_{2i}(k)$ (und $\lambda_{3i}(k)$) verändern. Eine günstige Wahl dieser Faktoren hängt stark von den einwirkenden Störungen ab und wird am besten im on-line Betrieb am Prozeß vorgenommen.

Es sei noch einmal betont, daß die hier eingeführten variablen Gewichtungsfaktoren nicht die Stabilitätseigenschaften verändern, da sie die Bedingungen nach Gln.(4.51) bis (4.53) erfüllen. Sie dienen lediglich dazu, die Varianzen der natürlichen Fehler zu verringern und dennoch gute Konvergenzeigenschaften bei fehlangepaßtem Regler zu gewährleisten.

Ein einfaches Beispiel soll den Einfluß der variablen Gewichtungsfaktoren in stochastisch gestörten Systemen demonstrieren. Betrachtet wird hierzu die Regelstrecke mit zwei Ein- und Ausgängen nach Gl.(4.247). Für die Abtastzeit $T = 0.1$ sec erfüllt das diskrete Streckenmodell Voraussetzung V2.3, so daß kein Korrekturnetzwerk

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{0.8s+1} & \dfrac{0.1}{(2s+1)(s+1)} \\ \dfrac{2}{(0.1s+1)(1.2s+1)} & \dfrac{0.5}{0.5s+1} \end{bmatrix} \qquad (4.247)$$

erforderlich ist. In Tabelle 4.1 sind die allgemeinen Versuchsbedingungen aufgeführt. Die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{21}(k)$ und $\lambda_{22}(k)$ werden dabei in drei Versuchen nach den Beziehungen

$$\lambda_{21}(k) = \lambda_{22}(k) = 1 \tag{4.248a}$$

bzw.

$$\lambda_{21}(k) = \lambda_{22}(k) = 20 \tag{4.248b}$$

bzw.

$$\lambda_{21}(k) = \begin{cases} f_{\lambda 21}(k) = 20\left(1 - \frac{30}{5} \sum_{\nu=0}^{4} e_1^2(k-\nu)\right) \\ \qquad\qquad \text{falls } f_{\lambda 21}(k) \geq 0.51 \\ 0.51 \text{ sonst} \end{cases} \tag{4.249a}$$

$$\lambda_{22}(k) = \begin{cases} f_{\lambda 22}(k) = 20\left(1 - \frac{50}{5} \sum_{\nu=0}^{4} e_2^2(k-\nu)\right) \\ \qquad\qquad \text{falls } f_{\lambda 22}(k) \geq 0.51 \\ 0.51 \text{ sonst} \end{cases} \tag{4.249b}$$

eingestellt. Da nach Tabelle 4.1 die Gewichtungsfaktoren $\lambda_{11}(k)$ und $\lambda_{12}(k)$ identisch Null gewählt werden, handelt es sich bei dem Adaptionsalgorithmus um ein "fixed gain"-Verfahren, bei dem der Einfluß der variablen Gewichtungsfaktoren $\lambda_{21}(k)$ und $\lambda_{22}(k)$ nach Gln.(4.249a,b) im Vergleich zu konstanten Gewichtungsfaktoren nach Gl.(4.248a) bzw. Gl.(4.248b) untersucht wird. Dabei zeigt sich, daß auch schon bei diesem Verfahren eine gute Unterdrückung der stochastischen Störungen erreicht wird, ohne daß von dem Algorithmus der stochastischen Approximation Gebrauch gemacht werden muß. In allen Versuchen werden zu Beginn die Reglerparameter bis auf die Matrix $\underline{\hat{B}}_0$ auf Null gesetzt. Da, wenn kein Korrekturnetzwerk benutzt wird, $\underline{\hat{B}}_0$ zu jedem Zeitpunkt invertierbar sein muß (vgl. Gl. (4.60)), wird $\underline{\hat{B}}_0$ mit der Einheitsmatrix vorbelegt. Als Sollwerte werden PRBS-Signale mit einer langen Impulsbreite gewählt, mit

- Regelstrecke nach Tabelle 4.1
- Abtastzeit: $T = 0.1$ sec
- Vorfilter:

$$\underline{G}_V(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \dfrac{0.181}{1 - 0.819\ z^{-1}} & 0 \\ 0 & \dfrac{0.330}{1 - 0.670\ z^{-1}} \end{bmatrix}$$

- kein Korrekturnetzwerk
- Parallelmodell: $\underline{B}_M(z^{-1}) = \underline{I}$; $\underline{A}_M(z^{-1}) = \underline{I}$
- Regler ohne explizites I-Verhalten minimaler Ordnung
- Störpolynommatrix: $\underline{C}(z^{-1}) = \underline{I}$
- Störung: weißes Rauschen mit der Kovarianzmatrix

$$E\{\underline{\varepsilon}(k)\ \underline{\varepsilon}^T(k)\} = 2.5 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sollwerte: PRBS-Signale

  $w_1$: Amplitude = 0.3,
  minimale Impulsbreite = 50 Abtastschritte,
  Schieberegisterlänge = 5

  $w_2$: Amplitude = 0.6
  minimale Impulsbreite = 60 Abtastschritte
  Schieberegisterlänge = 8

- Adaption: $\underline{G}_1 = \underline{G}_2 = 100\ \underline{I}$

  $\lambda_{11}(k) = \lambda_{12}(k) \equiv 0$

  $\lambda_{31}(k) = \lambda_{32}(k) \equiv 1$

  $(\rho_1 = \rho_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 10^4)$

- Regleranfangswerte:

  $\hat{\underline{P}}_1(0) = \hat{\underline{P}}_2(0) = \underline{0}$

  $\hat{\underline{B}}_0(0) = \underline{I}$

Tabelle 4.1. Allgemeine Versuchsbedingungen der in Bild 4.6 bis Bild 4.10 dokumentierten Simulationen

denen in langen Zeitabständen erfolgende Sollwertänderungen simuliert werden. Mit Absicht sind sie so gewählt, daß sie keine optimale Erregung des adaptiven Regelungssystems gewährleisten.

Um den Einfluß der Gewichtungsfaktoren quantitativ beurteilen zu können, werden die Verlustfunktionen

$$I[e_i(k)] = \sum_{\nu=0}^{k} e_i^2(\nu); \quad i = 1,2 \tag{4.250}$$

ausgewertet. Für die ersten 2000 Abtastschritte sind diese Funktionen in Bild 4.6 dargestellt. Die Steigung der Verlustfunktionen ist ein Maß für die Varianz der Fehler.

In Bild 4.6 ist zu erkennen, daß etwa bis $k = 200$ die Verlustfunktionen steil verlaufen, während sie anschließend deutlich abflachen. Dies liegt daran, daß in den ersten 200 Abtastschritten die eigentliche Adaption stattfindet, während danach der Regler im näherungsweise angepaßten Zustand ist und nur noch die stochastischen Störungen wirken. Die schlechtesten Werte der Verlustfunktionen liefert das Verfahren mit den konstanten großen Gewichtungsfaktoren $\lambda_{21}$ und $\lambda_{22}$ nach Gl.(4.248b). Dies liegt daran, daß für diese Werte die Faktoren $r_1(k)$ und $r_2(k)$ im Mittel zu kleine Werte annehmen und damit die Adaption zu träge eingestellt ist. Auch die Steigung der Verlustfunktionen für große Zeiten k liegt bei der Wahl $\lambda_{21}(k) = \lambda_{22}(k) = 20$ deutlich höher als bei den beiden anderen Verfahren nach Gl.(4.248a) bzw. Gln.(4.249a,b), so daß in diesem Fall nicht nur eine schlechte Konvergenz, sondern auch eine hohe Varianz der natürlichen Fehler vorliegt. Bei den beiden anderen Verfahren ist die Verlustfunktion $I[e_1(k)]$ im Fall des konstanten Gewichtungsfaktors $\lambda_{21}$ nach Gl.(4.247) deutlich größer als bei dem variablen Gewichtungsfaktor nach Gl.(4.249a). Bei der Funktion $I[e_2(k)]$ verhält es sich jedoch genau umgekehrt. Ein Grund hierfür liegt wohl darin, daß die Varianz der am ersten Ausgang der ungeregelten Strecke meßbaren stochastischen Störung

$$r_{\varepsilon 1}(z) = \frac{1}{A_1(z^{-1})}\, \varepsilon_1(z) \quad \text{(vgl. Gl.(2.27))}$$

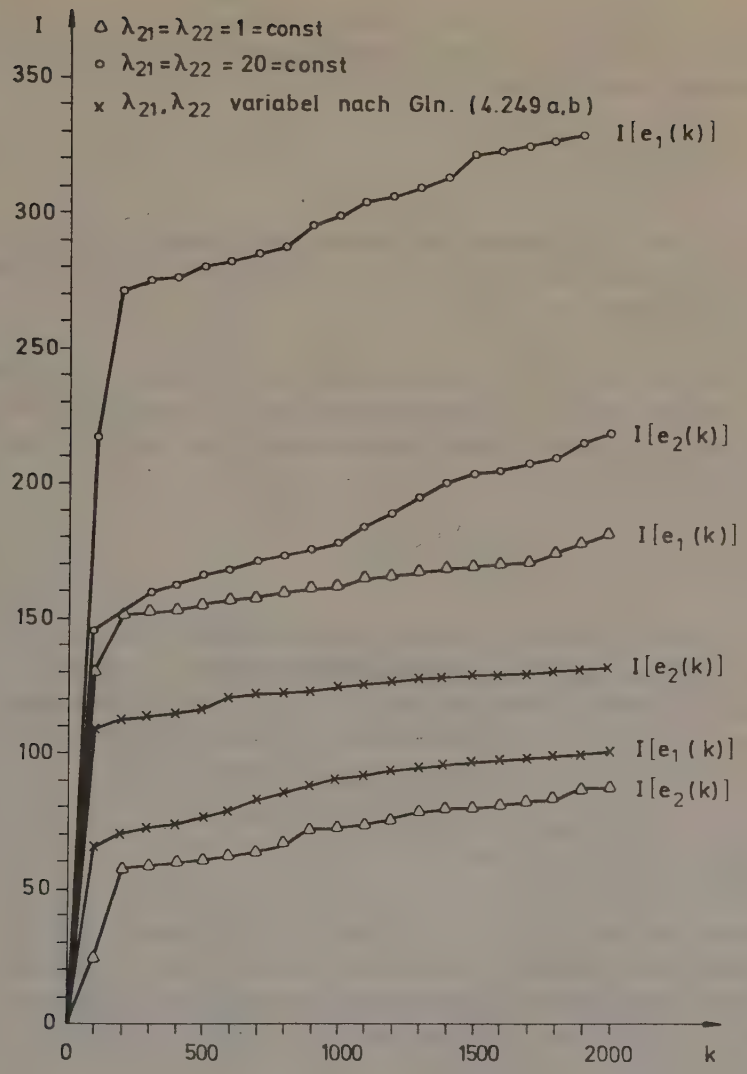



Bild 4.6. Graphische Darstellung der Verlustfunktionen $I[e_i^2(k)]$ nach Gl.(4.250) für die Versuchsbedingungen nach Tabelle 4.1

den Wert 34.16 aufweist, während die Varianz der am zweiten Ausgang meßbaren stochastischen Störung

$$r_{\varepsilon 2}(z) = \frac{1}{A_2(z^{-1})}\,\varepsilon_2(z)$$

nur 0.26 beträgt. Die Störung der ersten Regelgröße ist somit sehr groß und führt damit bei dem Verfahren nach Gl.(4.247) zu den hohen Verlustfunktionswerten $I[e_1^2(k)]$.

Aufgrund des Verlaufs der Verlustfunktionen kann sicher angenommen werden, daß für $k \geq 1300$ die eigentliche Adaption abgeschlossen ist und nur noch die stochastischen Störungen wirksam sind. Die quadratischen Mittelwerte

$$\bar{\sigma}_{e101,i}(k) = \frac{1}{101} \sum_{\nu=0}^{100} e_i^2(k-\nu); \quad i = 1,2 \qquad (4.251)$$

sind für $k \in [1300, 2000]$ in Bild 4.7 dargestellt. Es zeigt sich, daß das Verfahren mit variablen Gewichtungsfaktoren nach Gln. (4.249a,b) im Mittel günstigere Werte liefert als das Verfahren mit festen Gewichtungsfaktoren nach Gl.(4.248a). In Tabelle 4.2 sind die quadratischen Gesamtmittelwerte

$$\bar{\sigma}_{e701,i} = \frac{1}{701} \sum_{\nu=0}^{700} e_i^2(2000-\nu) \qquad (4.252)$$

des Zeitintervalls $k \in [1300, 2000]$ für beide Verfahren aufgeführt. Sowohl die quadratischen Mittelwerte nach Gl.(4.251) als auch nach Gl.(4.252) zeigen, daß die Einführung variabler Gewichtungsfaktoren zu einer Varianzverminderung der natürlichen Fehler führt.

Obwohl die hier diskutierten Verlustfunktionen und quadratischen Mittelwerte einen objektiven Vergleich der Verfahren ermöglichen, sind sie wenig anschaulich. In Bild 4.8 und Bild 4.9 sind daher die Zeitverläufe der Regelgrößen $y_1$ und $y_2$ im Intervall $k \in [1830, 2000]$ bzw. $t \in [183\ \text{sec}, 200\ \text{sec}]$ dargestellt. Zum Vergleich sind die an den Ausgängen der ungeregelten Regelstrecke

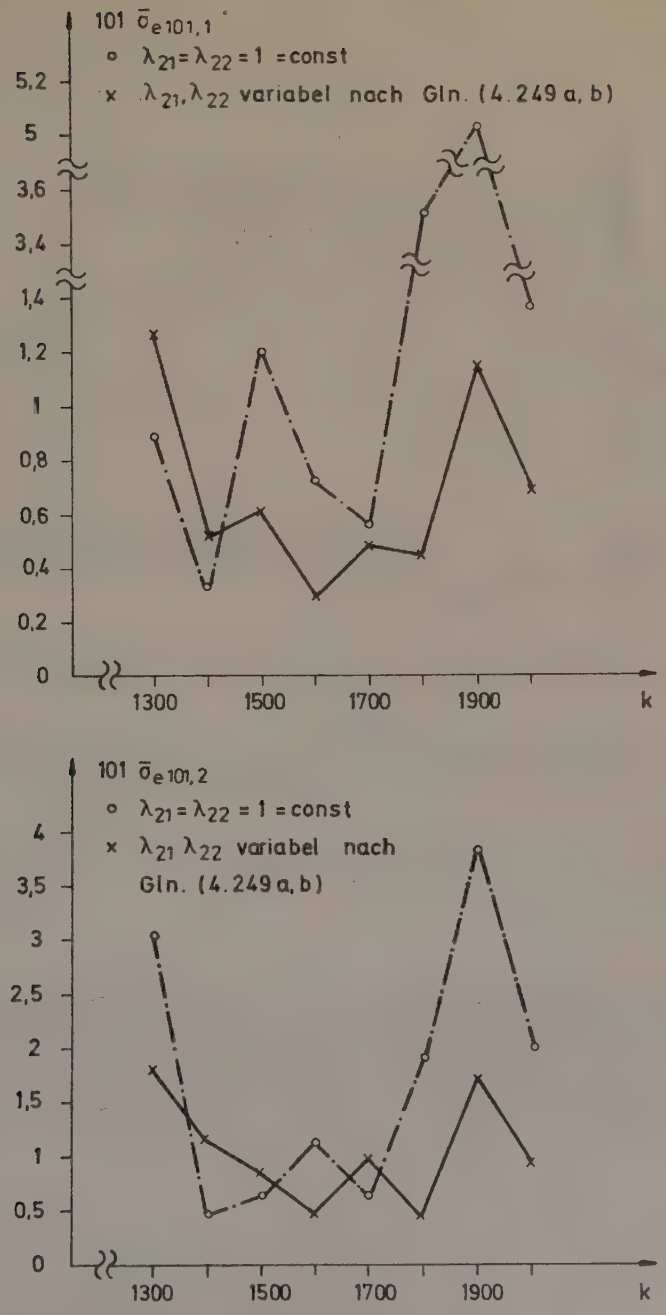



Bild 4.7. Verlauf der quadratischen Mittelwerte $\bar{\sigma}_{e101,i}(k)$ nach Gl.(4.251)

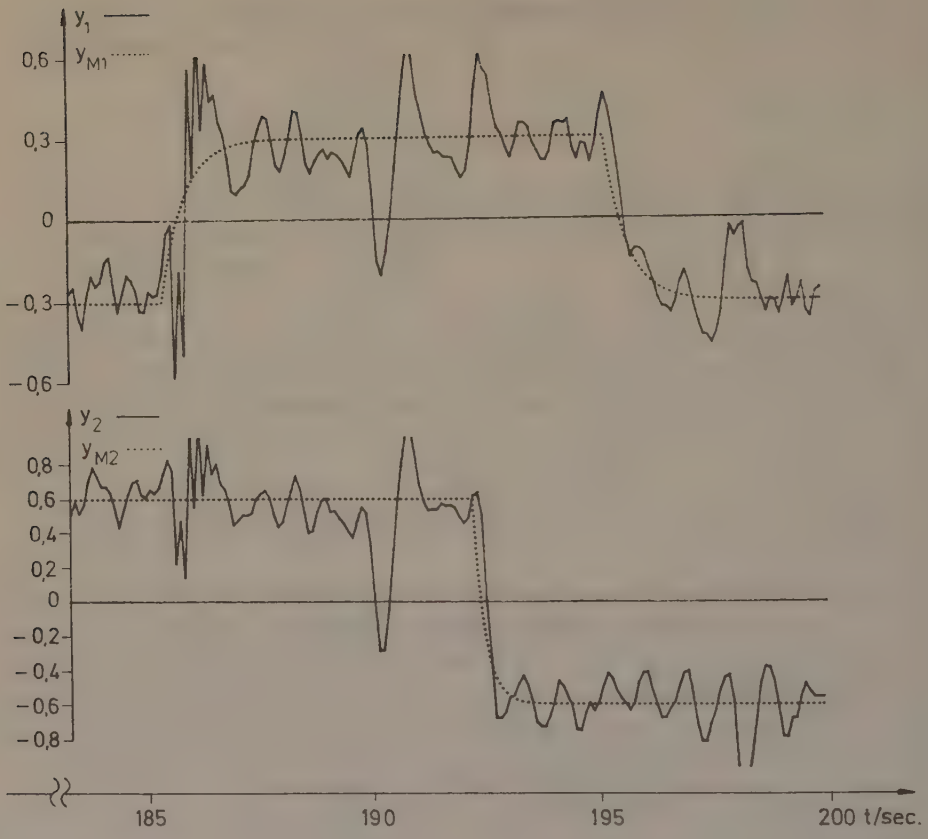



Bild 4.8. Zeitverlauf der Regelgrößen und der Ausgangsgrößen des Parallelmodells im Intervall $t \in [183\ \text{sec}, 200\ \text{sec}]$ nach den Versuchsbedingungen aus Tabelle 4.1 mit konstanten Gewichtungsfaktoren $\lambda_{21}$, $\lambda_{22}$ nach Gl.(4.248a)

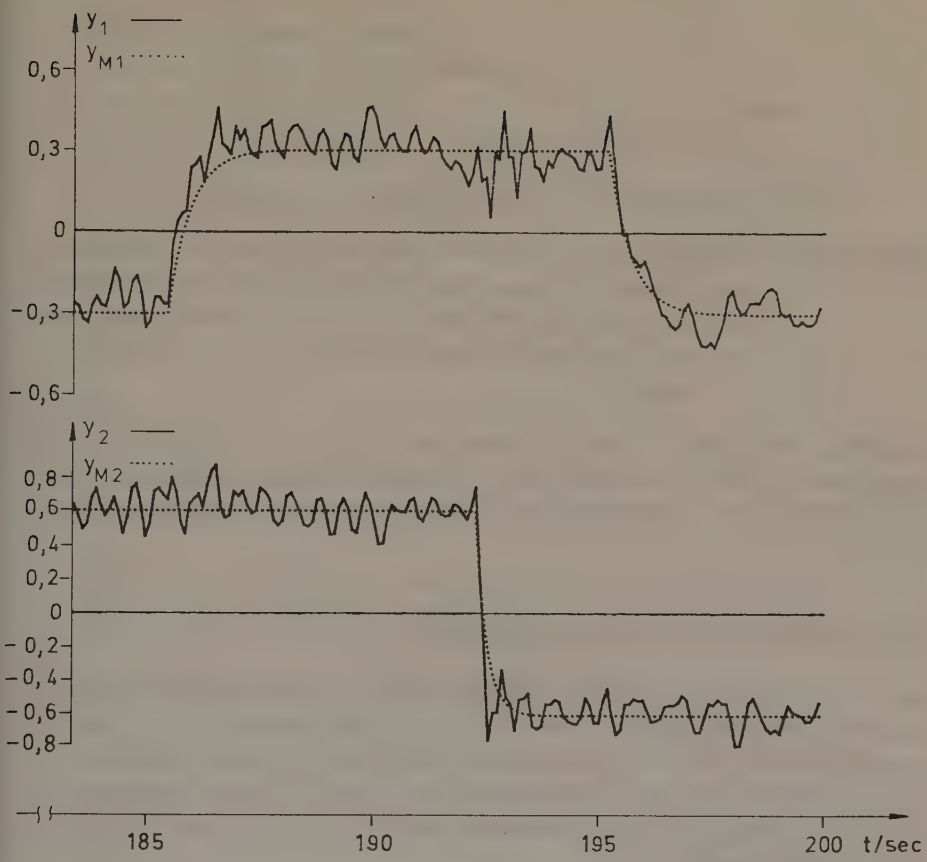



Bild 4.9. Zeitverlauf der Regelgrößen und der Ausgangsgrößen des Parallelmodells im Intervall $t \in$ [183 sec, 200 sec] nach den Versuchsbedingungen aus Tabelle 4.1 mit variablen Gewichtungsfaktoren $\lambda_{21}$, $\lambda_{22}$ nach Gln.(4.249a,b)

| | i = 1 | | i = 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | $\lambda_{21}$ fest | $\lambda_{21}$ variabel | $\lambda_{22}$ fest | $\lambda_{22}$ variabel |
| $\bar{\sigma}_{e701,i}$ | $19.2 \cdot 10^{-3}$ | $5.7 \cdot 10^{-3}$ | $15.3 \cdot 10^{-3}$ | $8.7 \cdot 10^{-3}$ |

Tabelle 4.2. Quadratische Mittelwerte nach Gl.(4.252) der natürlichen Fehler $e_1$ und $e_2$ im Intervall $k \in [1300, 2000]$ für feste Gewichtungsfaktoren $\lambda_{21} = \lambda_{22} = 1$ nach Gl.(4.248a) und variable Gewichtungsfaktoren $\lambda_{21}$, $\lambda_{22}$ nach Gln. (4.249a,b)

meßbaren Störungen $r_{\varepsilon 1}$ und $r_{\varepsilon 2}$ nach Gl.(2.27) in Bild 4.10 für dasselbe Zeitintervall aufgezeichnet. Auch an diesen Bildern wird die Überlegenheit des Verfahrens mit variablem Gewichtungsfaktor deutlich.

### 4.4.6. Schätzung der Störpolynommatrix

Um für stochastisch gestörte Systeme einen Minimum-Varianz-Regler zu entwerfen, muß nach Abschnitt 2.3.2.2 die Matrix $\underline{A}_M(z^{-1})$ der Nennerpolynome des Parallelmodells gleich der Störpolynommatrix $\underline{C}(z^{-1})$ gewählt werden. Diese Matrix ist aber a priori unbekannt und muß deshalb ebenfalls geschätzt werden. Ein Weg hierzu wird im folgenden gezeigt.

Die Schätzung des Störpolynoms $\underline{C}(z^{-1})$ ist nur sinnvoll, wenn ein Minimum-Varianz-Regler eingesetzt werden soll. Da bei diesem Regler aber kein Korrekturnetzwerk verwendet wird, wird in diesem Abschnitt angenommen, daß

$$\underline{B}'_K(z^{-1}) \equiv \underline{0} \tag{4.253}$$

und

$$\underline{Y}_K(z) \equiv 0 \tag{4.254}$$

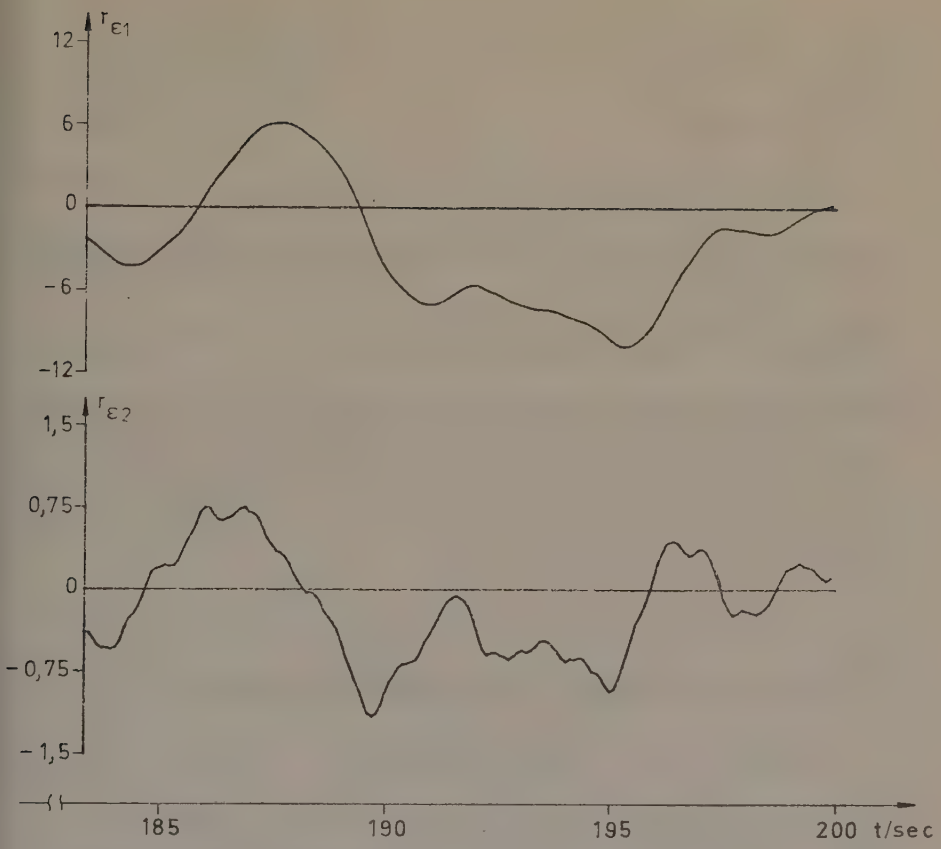



Bild 4.10. Zeitverlauf der an den Ausgängen der ungeregelten Regelstrecke meßbaren stochastischen Störungen $r_{\varepsilon 1}$ und $r_{\varepsilon 2}$ nach Gl.(2.27) im Intervall $t \in [183\ \text{sec}, 200\ \text{sec}]$

ist. Mit der Wahl

$$\underline{A}_M(z^{-1}) = \underline{C}(z^{-1}) \tag{4.255}$$

$$\underline{B}_M(z^{-1}) = \underline{C}(z^{-1}) \tag{4.256}$$

folgt unter Berücksichtigung der Diagonalität der Störpolynommatrix nach Gl.(2.22e) aus Gl.(2.37)

$$\underline{y}_M(z) = z^{-\bar{d}_e}\, \underline{D}_a(z^{-1})\, \underline{w}_V(z). \tag{4.257}$$

Bei unbekannter Störpolynommatrix $\underline{C}(z^{-1})$ können $\underline{A}_M(z^{-1})$ und $\underline{B}_M(z^{-1})$ natürlich nicht nach Gln.(4.255) und (4.256) realisiert werden, aber der Ausgangssignalvektor $\underline{y}_M(z)$ des Parallelmodells bleibt auf jeden Fall nach Gl.(4.257) berechenbar. Mit Gl.(4.253), Gl.(4.254) und Gl.(4.256) gilt nach Gl.(4.1)

$$\underline{u}(z) = \underline{C}(z^{-1})\, \underline{w}_V(z), \tag{4.258}$$

so daß sich für das implizite Stellgesetz, Gl.(4.13),

$$\underline{B}_0\, \underline{u}_{dI}(z) = \underline{C}(z^{-1})\, \underline{w}_V(z) + \mathfrak{Z}\{\bar{\underline{P}}\, \bar{\underline{x}}(k)\} \tag{4.259}$$

ergibt. Für die Störpolynommatrix $\underline{C}(z^{-1})$ wird entsprechend Gl. (2.22e) Diagonalform vorausgesetzt. Die Diagonalelemente, also die Störpolynome $C_i(z^{-1})$, besitzen die allgemeine Form

$$C_i(z^{-1}) = 1 + \sum_{l=1}^{n(C_i)} c_{il}\, z^{-l}; \quad i = 1, \ldots, q. \tag{4.260}$$

Definiert man nun die Signalvektoren

$$\bar{\underline{x}}_{Ci}^T(k) = (w_{Vi}(k-1), \ldots, w_{Vi}(k-n(C_i)), \bar{\underline{x}}_i^T(k)); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.261}$$

$$\bar{\underline{x}}_C(k) = \begin{bmatrix} \bar{\underline{x}}_{C1}(k) \\ \bar{\underline{x}}_{C2}(k) \\ \vdots \\ \bar{\underline{x}}_{Cq}(k) \end{bmatrix} \tag{4.262}$$

und die Parametervektoren

$$\underline{p}_{Ci}^T = (c_{i1}, \ldots, c_{i,n(C_i)}, \bar{\underline{p}}_i^T);\ i = 1, \ldots, q, \tag{4.263}$$

wobei die Vektoren $\bar{\underline{x}}_i$ nach Gl.(4.10) und $\bar{\underline{p}}_i$ nach Gl.(4.7) aufgebaut sind, und bildet die Parametermatrix

$$\bar{\underline{P}}_C = \begin{bmatrix} \underline{p}_{C1}^T & \underline{0}^T & & \\ & \underline{p}_{C2}^T & \underline{0}^T & \\ \underline{0}^T & & \underline{p}_{C3}^T & \\ & & \vdots & \\ & \underline{0}^T & & \underline{p}_{Cq}^T \end{bmatrix}, \tag{4.264}$$

so erhält man die Beziehung

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\underline{C}(z^{-1})\ \underline{w}_V(z)\} + \bar{\underline{P}}\ \underline{x}(k) = \underline{w}_V(k) + \bar{\underline{P}}_C\ \bar{\underline{x}}_C(k). \tag{4.265}$$

Somit folgt aus Gl.(4.259) im Zeitbereich das implizite Stellgesetz

$$\underline{B}_0\ u_{dI}(k) = \underline{w}_V(k) + \bar{\underline{P}}_C\ \bar{\underline{x}}_C(k). \tag{4.266}$$

Ersetzt man in diesem impliziten Stellgesetz die unbekannten Matrizen $\underline{B}_0$ und $\bar{\underline{P}}_C$ wieder durch ihre Schätzwerte, so ergibt sich

$$\hat{\underline{B}}_0(k-1)\ \underline{u}_{dI}(k) = \underline{w}_V(k) + \hat{\bar{\underline{P}}}_C(k-1)\ \bar{\underline{x}}_C(k). \tag{4.267}$$

Mit Gln.(4.255), (4.253), (4.258) und (4.265) erhält man aus Gl. (4.18) für den natürlichen Fehlervektor das dynamische Verhalten

$$\mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\,\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\,\underline{C}(z^{-1})\,\underline{e}(z)\}$$

$$= \underline{w}_V(k) - \underline{B}_O\,\underline{u}_{dI}(k) + \bar{\underline{P}}_C\,\bar{\underline{x}}_C(k) + \mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\,\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\,\underline{v}(z)\}\,. \tag{4.268}$$

Addiert man nun auf die rechte Seite von Gl.(4.268) den nach Gl. (4.267) identisch verschwindenden Term

$$\hat{\underline{B}}_O(k-1)\,\underline{u}_{dI}(k) - \underline{w}_V(k) - \hat{\bar{\underline{P}}}_C(k-1)\,\bar{\underline{x}}_C(k) \equiv \underline{0}\,,$$

so ergibt sich mit den Definitionen

$$\underline{p}_{Ci}^T = (b_{i1O},\, b_{i2O},\, \ldots,\, b_{iqO},\, \bar{\underline{p}}_{Ci}^T);\quad i = 1, \ldots, q \tag{4.269}$$

$$\hat{\underline{p}}_{Ci}^T(k) = (\hat{b}_{i1O}(k),\, \hat{b}_{i2O}(k),\, \ldots,\, \hat{b}_{iqO}(k);\, \hat{\bar{\underline{p}}}_{Ci}^T(k));$$

$$i = 1, \ldots, q \tag{4.270}$$

$$\underline{x}_{Ci}^T(k) = (-\underline{u}_{dI}(k),\, \bar{\underline{x}}_{Ci}^T(k)),\quad i = 1, \ldots, q \tag{4.271}$$

für jede Komponente des natürlichen Fehlervektors das Schätzproblem

$$\mathcal{Z}^{-1}\{C_i(z^{-1})\,e_i(z)\} = [\underline{p}_C - \hat{\underline{p}}_{Ci}(k-d_e-d_i^a-1)]^T\,\underline{x}_{Ci}(k-d_e-d_i^a)$$

$$+ v_i(k);\quad i = 1, \ldots, q\,. \tag{4.272}$$

Im Unterschied zu Abschnitt 4.2, Gl.(4.26), können in Gl.(4.272) nicht die gefilterten Fehler $C_i(z^{-1})\,e_i(z)$ zur Adaption verwendet werden, weil die Polynome $C_i(z^{-1})$ ja unbekannt sind. Definiert man die Parametervektoren

$$\underline{c}_i^T = (c_{i1}, \ldots, c_{i,n(C_i)});\quad i = 1, \ldots, q, \tag{4.273}$$

die die Koeffizienten der Störpolynome enthalten, deren Schätzwerte

$$\underline{\hat{c}}_i^T(k) = (\hat{c}_{i1}(k), \ldots, \hat{c}_{i,n(C_i)}(k)); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.274}$$

und die Signalvektoren

$$\underline{x}_{ei}^T(k) = (e_i(k), \ldots, e_i(k-n(C_i)+1)); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.275}$$

und addiert auf beiden Seiten von Gl.(4.272) den Term $[-\underline{c}_i + \hat{\underline{c}}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a-1)]^T \underline{x}_{ei}(k-1)$, so erhält man

$$e_{Ci}(k) = [\underline{p}_C - \hat{\underline{p}}_{Ci}^T(k-\bar{d}_e-d_i^a-1)]^T \underline{x}_C(k-\bar{d}_e-d_i^a) + [-\underline{c}_i + \hat{\underline{c}}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a-1)]^T \underline{x}_{ei}(k-1); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.276}$$

mit

$$e_{Ci}(k) = e_i(k) + \hat{\underline{c}}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a-1)\ \underline{x}_{ei}(k-1); \quad i = 1, \ldots, q. \tag{4.277}$$

Die gefilterten Fehler $e_{Ci}$ werden mit den geschätzten Werten für die Koeffizienten der Störpolynome gebildet und sind damit berechenbar. Mit den Parametervektoren

$$\underline{p}_{Ci}'^T = (\underline{p}_{Ci}^T, -\underline{c}_i^T); \quad i = 1, \ldots, q, \tag{4.278}$$

deren Schätzwerten

$$\hat{\underline{p}}_{Ci}'^T(k) = (\hat{\underline{p}}_{Ci}^T(k), -\hat{\underline{c}}_i^T(k)); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.279}$$

und den Signalvektoren

$$\underline{x}_{Ci}'^T(k) = (\underline{x}_{Ci}^T(k-\bar{d}_e-d_i^a+1), \underline{x}_{ei}^T(k)); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.280}$$

folgt mit den Signalen

$$h_i(k) = [\hat{\underline{p}}_{Ci}'(k-\bar{d}_e-d_i^a-1) - \hat{\underline{p}}_{Ci}'(k-1)]^T \underline{x}_{Ci}'(k-1); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.281}$$

für die vermehrten Fehler

$$\bar{e}_i(k) = e_{Ci}(k) + h_i(k); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.282}$$

mit Gl.(4.276) die Beziehung

$$\bar{e}_i(k) = [\underline{p}'_{Ci} - \hat{\underline{p}}'_{Ci}(k-1)]^T \, \underline{x}'_{Ci}(k-1) + v_i(k); \quad i = 1, \ldots, q \,. \tag{4.283}$$

Gl.(4.283) hat mathematisch dieselbe Form wie Gl.(4.47), lediglich die Parametervektoren $\underline{p}_i$ sind durch $\underline{p}'_{Ci}$ und die Signalvektoren $\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)$ durch $\underline{x}'_{Ci}(k-1)$ ersetzt. Wendet man nun auch den Adaptionsalgorithmus Gln.(4.48) bis (4.55b) bzw. die modifizierte Form nach Abschnitt 4.4.3 mit dem Einstellgesetz nach Gl.(4.168a,b) sinngemäß an, indem man auch dort $\hat{\underline{p}}_i$ durch $\hat{\underline{p}}'_{Ci}$ und $\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)$ durch $\underline{x}'_{Ci}(k-1)$ ersetzt, so bleiben die bisher abgeleiteten Ergebnisse gültig. D. h. im gestörten System bleiben die vermehrten Fehler $\bar{e}_i$ und die gefilterten Fehler $e_{Ci}$ für $i \in \{1,\ldots,q\}$beschränkt, und die geschätzten Parameter $\hat{\underline{p}}'_{Ci}(k)$ konvergieren gegen konstante Werte $\underline{p}'^{*}_{Ci}$. Im ungestörten System konvergieren mit dem Einstellgesetz nach Gl.(4.48) (das jetzt natürlich auf die Parametervektoren $\hat{\underline{p}}'_{Ci}$ unter Verwendung der Signalvektoren $\underline{x}'_{Ci}$ anzuwenden ist) die vermehrten Fehler $\bar{e}_i$ und die gefilterten Fehler $e_{Ci}$ entsprechend den Aussagen aus Abschnitt 4.2 wieder gegen Null. Der qualitative Unterschied gegenüber dem Verfahren nach Abschnitt 4.2 besteht darin, daß die Vektoren $\hat{\underline{p}}'_{Ci}$ außer den Reglerparametern $\hat{\underline{p}}_{Ci}$ auch die Schätzwerte $\hat{\underline{c}}_i$ für die adaptiven Störfilter enthalten, mit denen die natürlichen Fehler $e_i$ gefiltert werden, um zumindest asymptotisch einen Minimum-Varianz-Regler zu erhalten. Damit aus der Beschränktheit der gefilterten Fehler $e_{Ci}$ bzw. deren Konvergenz gegen Null auch die Beschränktheit der natürlichen Fehler $e_i$ bzw. deren Konvergenz gegen Null folgt, müssen nach Gl.(4.277) die Polynome

$$C_{i\infty}(z^{-1}) = 1 + \sum_{l=1}^{n(C_i)} c^*_{il} \, z^{-l}; \quad i = 1, \ldots, q$$

mit

$$c^*_{il} = \lim_{k\to\infty} \hat{c}_{il}(k); \quad i = 1, \ldots, q$$
$$l = 1, \ldots, n(C_i)$$

alle Wurzeln im Einheitskreis haben; d. h. die adaptiven Störfilter müssen gegen asymptotisch stabile Filter konvergieren. Dies kann aber nicht a priori garantiert werden. In der praktischen Anwendung dieses Verfahrens muß man daher in jedem Abtastschritt die Wurzeln der mit den Schätzwerten gebildeten Polynome

$$\hat{C}_i(z^{-1}, k) = 1 + \sum_{l=1}^{n(C_i)} \hat{c}_{il}(k)\, z^{-l}; \quad i = 1, \ldots, q$$

untersuchen. Liegen diese Wurzeln außerhalb eines a priori definierten Stabilitätsgebietes $|z| \leq \rho < 1$ der z-Ebene, so müssen die Koeffizienten $\hat{c}_{il}$ so verändert werden, daß die Wurzeln auf den Rand dieses Gebietes verschoben werden.

Leider zeigte die hier vorgestellte Methode der Störpolynomschätzung in Simulationsversuchen keine signifikante Verringerung der Varianzen der natürlichen Fehler. Dies hängt vermutlich damit zusammen, daß die natürlichen Fehler eine Linearkombination aus den einwirkenden Störungen und den Parameterfehlern des Reglers darstellen und eine Aufspaltung der Fehlersignale in den Teil, der nur von der Störung abhängt, und jenen Teil, der von den Parameterfehlern abhängt, nicht eindeutig möglich ist.

### 4.4.7. Empfehlungen

Bei realen Prozessen treten im allgemeinen deterministische und stochastische Störungen gleichzeitig auf. In diesem Fall ist der im Abschnitt 4.4.3 diskutierte Regler mit explizitem I-Verhalten und dem Einstellgesetz nach Gln.(4.168a,b) garantiert stabil, wenn zusätzlich Gl.(4.173) beachtet wird. Dann konvergieren die natürlichen Fehler bzw. ihre Erwartungswerte in ein beschränktes

Gebiet. Um ihre Varianz im näherungsweise angepaßten Zustand nicht unnötig durch die Adaption zu erhöhen, gleichzeitig aber eine schnelle Konvergenz bei fehlangepaßtem Regler zu ermöglichen, werden variable Gewichtungsfaktoren nach Abschnitt 4.4.5 empfohlen.

Obwohl bei Verwendung eines Reglers mit explizitem I-Verhalten die Stabilität des adaptiven Regelungssystems bei deterministischen und stochastischen Störungen für den Adaptionsalgorithmus nach Abschnitt 4.2, Gln.(4.48) bis (4.55b), theoretisch nicht garantiert ist, hat sich in Simulationen und Experimenten gezeigt, daß in diesem Fall die natürlichen Fehler bzw. ihre Erwartungswerte gegen Null konvergieren. Hierin liegt die praktische Attraktivität des Einstellgesetzes nach Gl.(4.48).

Leider kann im gestörten System eine schnelle Konvergenz der natürlichen Fehler mit einem zusätzlichen "Detuning" der Reglerparameter verbunden sein. Dies kann sich bei Führungsgrößenänderungen negativ auswirken. Kommen solche Änderungen nur selten vor, so ist es sinnvoll, vorher das gesamte Regelungssystem durch geeignete Testsignale zu erregen, um eine Anpassung der Reglerparameter zu erzwingen und unerwünschte Effekte wie Überschwingen usw. ausschließen zu können. Eine andere Möglichkeit besteht darin, Sollwertänderungen - falls möglich - "vorsichtig" z. B. in Form einer Rampe oder einer Treppenfunktion durchzuführen.

Sind a priori Kenntnisse über die Parameter der Regelstrecke vorhanden, so kann mit dem Verfahren von Kreisselmeier und Narendra (vgl. Abschnitt 4.4.4.2) eine starke Fehlanpassung des Reglers vermieden werden. Es scheint daher sinnvoll, das Verfahren von Kreisselmeier und Narendra mit dem Verfahren aus Abschnitt 4.4.3 zu verbinden.

## 4.5. Einige Modifikationen des adaptiven Reglers nach Abschnitt 4.2

### 4.5.1. Störgrößenaufschaltung meßbarer Störungen

Wird das dynamische Verhalten der Regelstrecke außer von den Stellgrößen $\underline{u}$ und den nicht meßbaren Störungen $\underline{\varepsilon}$ und $\underline{z}$ auch noch von meßbaren Störungen $\underline{s}$ beeinflußt, so kann der Effekt dieser Störungen durch eine Störgrößenaufschaltung kompensiert werden. Das dynamische Verhalten der Regelgrößen sei jetzt durch die Beziehung

$$\underline{A}(z^{-1})\ \underline{y}(z) = \underline{D}_a(z^{-1})\ [\underline{B}(z^{-1})\ \underline{D}_e(z^{-1})\ \underline{u}(z) + \underline{D}_{sa}(z^{-1})\ \underline{M}(z^{-1})\ \underline{D}_{se}(z^{-1})\ \underline{s}(z)] + \underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}(z) + \underline{z}(z) \tag{4.284}$$

beschrieben. Diese Gleichung unterscheidet sich von Gl.(2.21) durch Addition des Terms $\underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{D}_{sa}(z^{-1})\ \underline{M}(z^{-1})\ \underline{D}_{se}(z^{-1})\ \underline{s}(z)$ auf der rechten Seite. Dabei ist $\underline{M}(z^{-1})$ eine beliebige Polynommatrix, d. h.

$$\underline{M}(z^{-1}) = \{M_{ij}(z^{-1})\};\quad i,j = 1, \ldots, q \tag{4.285a}$$

$$M_{ij}(z^{-1}) = \sum_{l=0}^{n(M_{ij})} m_{ijl}\ z^{-l};\quad i,j = 1, \ldots, q\,. \tag{4.285b}$$

Die Koeffizienten $m_{ijl}$ seien ebenso wie die Parameter der Regelstrecke unbekannt. Hingegen wird angenommen, daß die Grade $n(M_{ij})$ a priori abgeschätzt werden können. $\underline{D}_{sa}(z^{-1})$ und $\underline{D}_{se}(z^{-1})$ sind - wie $\underline{D}_a(z^{-1})$ und $\underline{D}_e(z^{-1})$ - Diagonalmatrizen, die nur reine Schrittverzögerungen enthalten; es gilt

$$\underline{D}_{sa}(z^{-1}) = \mathrm{diag}\ \{z^{-d_i^{sa}}\};\quad i = 1, \ldots, q \tag{4.286a}$$

$$\underline{D}_{se}(z^{-1}) = \mathrm{diag}\ \{z^{-d_i^{se}}\};\quad i = 1, \ldots, q\,. \tag{4.286b}$$

Da aus Kausalitätsgründen nur solche Störungen kompensiert werden können, die mit der gleichen oder mit einer größeren Schrittverzögerung wie die Stellgrößen die Regelgrößen beeinflussen, muß hier gefordert werden, daß

$$d_i^{sa} \geq 0; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.287}$$

und

$$d_i^{se} \geq \bar{d}_e; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.288}$$

ist. Gl.(4.288) bedeutet, daß eine Zerlegung

$$z^{-\bar{d}_e} \underline{s}_d(z) = \underline{D}_{se}(z^{-1}) \underline{s}(z) \tag{4.289}$$

existiert, wobei $\underline{s}_d$ eine kausale (Vektor-)Funktion von $\underline{s}$ ist, da für jede Komponente gilt

$$s_{di}(k) = s_i(k+\bar{d}_e-d_i^{se}); \quad i = 1, \ldots, q\,. \tag{4.290}$$

Multipliziert man, um einen Regler mit explizitem $(n_z+1)$-fachen I-Verhalten zu erhalten, Gl.(4.284) mit dem Faktor $(1-z^{-1})^{n_z+1}$ auf beiden Seiten, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{A}_I(z^{-1})\, \underline{y}(z) = \underline{D}_a(z^{-1})\, z^{-\bar{d}_e} [&\underline{B}(z^{-1})\, \underline{u}_{dI}(z) \\ &+ \underline{D}_{sa}(z^{-1})\, \underline{M}(z^{-1})\, \underline{s}_{dI}(z)] \\ &+ \underline{C}(z^{-1})\, \underline{\varepsilon}_I(z) + \underline{z}_I(z), \end{aligned} \tag{4.291}$$

wobei die Polynommatrix $\underline{A}_I(z^{-1})$ nach Gl.(2.86), die Signalvektoren $\underline{\varepsilon}_I(z)$ und $\underline{z}_I(z)$ nach Gl.(2.87c) und Gl.(2.87d) und der Signalvektor $\underline{u}_{dI}$ nach den Gleichungen (3.33) und (2.43) festgelegt sind und für den Vektor $s_{dI}(z^{-1})$ gilt

$$\underline{s}_{dI}(z^{-1}) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\, \underline{s}_d(z). \tag{4.292}$$

Wertet man nun mit dem Parallelmodell nach Gln.(2.37) bis (2.38c) und dem Korrekturnetzwerk nach Gln.(3.2) bis (3.3c) bzw. nach Gl. (3.35) die Gleichung

$$\underline{e}(z) = \underline{y}_M(z) - \underline{y}(z) - \underline{y}_K(z) \tag{3.8}$$

des natürlichen Fehlers analog zu Abschnitt 3.2 aus, wobei jetzt allerdings von dem Streckenmodell nach Gl.(4.291) ausgegangen wird, so erhält man unter Berücksichtigung, daß hier ein Regler mit explizitem $(n_z+1)$-fachem I-Verhalten eingesetzt wird,

$$\begin{aligned}\underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{e}(z) = z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \Big[&\underline{B}_M(z^{-1})\ \underline{w}_V(z)\\ &- \{(\underline{I}-\underline{R}_I(z^{-1})\ z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})\\ &\quad + (\underline{I}-\underline{R}_K(z^{-1})\ z^{-1})\ \underline{B}'_K(z^{-1})\}\ \underline{u}_{dI}(z)\\ &+ \underline{S}_I(z^{-1})\ \underline{y}(z) + \underline{S}_K(z^{-1})\ \underline{y}_K(z)\\ &+ \underline{D}_{sa}(z^{-1})\ \underline{M}(z^{-1})\ \underline{s}_{dI}(z)\Big]\\ &- (\underline{I}-\underline{R}_I(z^{-1})\ z^{-1})\ (\underline{C}(z^{-1})\ \underline{\varepsilon}_I(z) + \underline{z}_I(z)).\end{aligned} \tag{4.293}$$

Gl.(4.293) ist mit Gl.(4.17) bis auf den Term $\underline{D}_{sa}(z^{-1})\ \underline{M}(z^{-1})\cdot \underline{s}_{dI}(z)$ identisch. Das implizite Stellgesetz

$$\begin{aligned}&\Big[(\underline{I}-\underline{R}_I(z^{-1})\ z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) + (\underline{I}-\underline{R}_K(z^{-1})\ z^{-1})\ \underline{B}'_K(z^{-1})\Big]\underline{u}_{dI}(z)\\ &= \underline{S}_I(z^{-1})\ \underline{y}(z) + \underline{S}_K(z^{-1})\ \underline{y}_K(z)\\ &\quad + \underline{D}_{sa}(z^{-1})\ \underline{M}(z^{-1})\ \underline{s}_{dI}(z)\end{aligned} \tag{4.294}$$

führt jetzt wieder auf die Beziehung

$$\underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{e}(z) = -(\underline{I}-\underline{R}_I(z^{-1})\ z^{-1})(\underline{C}(z)\ \underline{\varepsilon}_I(z) + \underline{z}_I(z))$$

für das dynamische Verhalten des natürlichen Fehlervektors, die bei Verwendung eines $(n_z+1)$-fachen freien Integrators mit Gl.(3.19) identisch ist. Das implizite Stellgesetz nach Gl.(4.294) unterscheidet sich von Gl.(3.36) nur durch Aufschaltung der von den meßbaren Störungen abhängigen Signale $\underline{D}_{sa}(z^{-1})\ \underline{M}(z^{-1})\ \underline{s}_{dI}(z)$.

Definiert man die Parametervektoren

$$\begin{aligned}\bar{\underline{p}}_{si}^T = [&\bar{\underline{p}}_i^T,\\ &m_{i10}, \ldots, m_{i1,n(M_{i1})}\\ &m_{i20}, \ldots, m_{i2,n(M_{i2})}\\ &\vdots\\ &m_{iq0}, \ldots, m_{iq,n(M_{iq})}];\\ &i = 1, \ldots, q\end{aligned} \tag{4.295}$$

mit den Vektoren $\bar{\underline{p}}_i$ nach Gl.(4.7), die Parametermatrix

$$\bar{\underline{P}}_s = \begin{bmatrix} \bar{\underline{p}}_{s1}^T & \underline{o}^T & & \\ \underline{o}^T & \bar{\underline{p}}_{s2}^T & \underline{o}^T & \\ \underline{o}^T & \bar{\underline{p}}_{s3}^T & \underline{o}^T & \\ & \vdots & & \\ \underline{o}^T & & \bar{\underline{p}}_{sq}^T & \end{bmatrix}, \tag{4.296}$$

die Signalvektoren

$$\underline{\bar{x}}_{si}^{T}(k) = [\underline{\bar{x}}_{i}^{T}(k),$$

$$s_{dI1}(k-d_i^{sa}), \ldots, s_{dI1}(k-d_i^{sa}-n(M_{i1}))\,|$$

$$s_{dI2}(k-d_i^{sa}), \ldots, s_{dI2}(k-d_i^{sa}-n(M_{i1}))\,|$$

$$\vdots$$

$$s_{dIq}(k-d_i^{sa}), \ldots, s_{dIq}(k-d_i^{sa}-n(M_{iq}))$$

$$i = 1, \ldots, q \qquad (4.297)$$

mit den Signalvektoren $\underline{\bar{x}}_i$ nach Gl.(4.10) und den Signalvektor

$$\underline{\bar{x}}_s(k) = \begin{bmatrix} \underline{\bar{x}}_{s1}(k) \\ \underline{\bar{x}}_{s2}(k) \\ \vdots \\ \underline{\bar{x}}_{sq}(k) \end{bmatrix}, \qquad (4.298)$$

so kann das Stellgesetz nach Gl.(4.294) unter Berücksichtigung der Definition für das Signal $\underline{\mu}$ und der Polynome $E_{ij}(z^{-1})$ nach Gln. (4.1) und (4.2) im Zeitbereich in der Form

$$[\underline{B}_O + \underline{B}'_{KO}]\ \underline{u}_{dI}(k) = \underline{\mu}(k) + \underline{\bar{P}}_s\ \underline{\bar{x}}_s(k) \qquad (4.299)$$

dargestellt werden. Gl.(4.299) ist mathematisch formal identisch mit Gl.(4.13), wenn dort $\underline{\bar{P}}$ durch $\underline{\bar{P}}_s$ und $\underline{\bar{x}}$ durch $\underline{\bar{x}}_s$ ersetzt wird. Der Term $\underline{\bar{P}}_s\ \underline{\bar{x}}_s(k)$ bewirkt jetzt physikalisch allerdings noch die Aufschaltung der meßbaren Störungen $\underline{s}_{dI}$.

Es ist nun bei unbekannten Parametern $\underline{B}_O$ und $\underline{\bar{P}}_s$ der Regelstrecke einschließlich der Störpolynommatrix $\underline{M}(z^{-1})$ einfach möglich, diese Parameter zu schätzen. Dazu wird analog zu Abschnitt 4.2 von dem Stellgesetz

$$[\hat{\underline{B}}_O(k-1) + \underline{B}'_{KO}]\ \underline{u}_{dI}(k) = \mu(k) + \hat{\underline{\bar{P}}}_s(k-1)\ \underline{\bar{x}}_s(k) \qquad (4.300)$$

ausgegangen, indem die exakten, aber unbekannten Reglerparameter in Gl.(4.299) durch ihre Schätzwerte ersetzt werden, wobei die Matrix $\hat{\bar{P}}_s$ die gleiche Struktur wie die Matrix $\bar{P}_s$ nach Gl.(4.296) besitzt. Mit den inzwischen eingeführten Abkürzungen erhält man aus Gl.(4.293) im Zeitbereich die Darstellung

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\,\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\,\underline{A}_M(z^{-1})\,\underline{e}(z)\} \\ &= \underline{\mu}(k) - (\underline{B}_0 + \underline{B}'_{K0})\,\underline{u}_{dI}(k) + \bar{\underline{P}}_s\,\bar{\underline{x}}_s(k) \\ &\quad + \mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\,\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\,\underline{v}(z)\} \end{aligned} \tag{4.301}$$

mit $\underline{v}(z)$ nach Gl.(4.19). Addiert man nun wieder in Analogie zu Abschnitt 4.2 den nach Gl.(4.300) identisch verschwindenden Term

$$[\hat{\underline{B}}_0(k-1) + \underline{B}'_{K0}]\,\underline{u}_{dI}(k) - \underline{\mu}(k) + \hat{\bar{\underline{P}}}_s(k-1)\,\bar{\underline{x}}_s(k) \equiv 0$$

auf die rechte Seite von Gl.(4.301), so erhält man

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\,\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\,\underline{A}_M(z^{-1})\,\underline{e}(z)\} \\ &= -[\underline{B}_0 - \hat{\underline{B}}_0(k-1)]\,\underline{u}_{dI}(k) \\ &\quad + [\bar{\underline{P}}_s - \hat{\bar{\underline{P}}}_s(k-1)]\,\bar{\underline{x}}_s(k) \\ &\quad + \mathcal{Z}^{-1}\{z^{\bar{d}_e}\,\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\,\underline{v}(z)\}. \end{aligned} \tag{4.302}$$

Bildet man nun auch in Analogie zu Abschnitt 4.2 die (erweiterten) Parametervektoren

$$\underline{p}_{si}^T = [b_{i1O},\, b_{i2O},\, \ldots,\, b_{iqO},\, \bar{\underline{P}}_{si}^T];\quad i = 1, \ldots, q \tag{4.303}$$

und die (erweiterten) Signalvektoren

$$\underline{x}_{si}^T(k) = (-\underline{u}_{dI}^T(k),\, \bar{\underline{x}}_{si}^T(k));\quad i = 1, \ldots, q\,, \tag{4.304}$$

so ergibt sich mit Gl.(4.20) und mit der Struktur der Matrizen $\underline{\bar{P}}_s$ und $\underline{\hat{P}}_s$ entsprechend Gl.(4.296) aus Gl.(4.302) das Schätzproblem

$$e_{Mi}(k) = [\underline{p}_{si} - \underline{\hat{p}}_{si}(k-\bar{d}_e-d_i^a-1)]^T \underline{x}_{si}(k-\bar{d}_e-d_i^a) + v_i(k);$$

$$i = 1, \ldots, q. \qquad (4.305)$$

Gl.(4.305) ist mathematisch formal mit Gl.(4.26) identisch, wenn man dort $\underline{p}_i$, $\underline{\hat{p}}_i$ und $\underline{x}_i$ durch $\underline{p}_{si}$, $\underline{\hat{p}}_{si}$ und $\underline{x}_{si}$ ersetzt. Dies bedeutet aber, daß auch der Adaptionsalgorithmus nach Gln.(4.48) bis (4.55b) (einschließlich der Modifikationen nach Abschnitt 4.4) wieder sinngemäß angewendet werden kann, wenn dort ebenfalls $\underline{\hat{p}}_i$ und $\underline{x}_i$ durch $\underline{\hat{p}}_{si}$ und $\underline{x}_{si}$ ersetzt werden. Zur Berechnung der Signale $h_i$ entsprechend Gl.(4.45), die zur Bildung der vermehrten Fehler benötigt werden, muß dies natürlich ebenfalls geschehen.

### 4.5.2. Beeinflussung des Konvergenzverhaltens der natürlichen Fehler durch Einführung zusätzlicher Filter

An Gl.(4.20) ist zu erkennen, daß die Wurzeln der Polynome $A_{Mi}(z^{-1})$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$), d. h. die Pole des Parallelmodells, die Konvergenz des natürlichen Fehlervektors beeinflussen. Durch Einführung zusätzlicher Filter kann der Einfluß des Parallelmodells auf die Konvergenz des natürlichen Fehlervektors reduziert werden. Dazu wird Gl.(4.18) betrachtet. Entsprechend der Struktur der Matrix $\underline{\bar{P}}$ nach Gl.(4.9), des Vektors $\underline{\bar{x}}$ nach Gl.(4.12) und der Diagonalität der Matrix $\underline{D}_a(z^{-1})$ nach Gl.(2.22c) folgt für jede Komponente $e_{Mi}$ des gefilterten Fehlervektors $\underline{e}_M$ nach Gl.(4.20) aus Gl.(4.18) im Zeitbereich

$$e_{Mi}(k) = \mu_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) - \underline{b}'^T_{KOi}\, \underline{u}_{dI}(k-\bar{d}_e-d_i^a) + \underline{p}_i^T\, \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) + v_i(k);$$

$$i = 1, \ldots, q, \qquad (4.306)$$

wobei die Vektoren $\underline{p}_i$ und $\underline{x}_i$ in Gl.(4.22) bzw. Gl.(4.24) definiert sind, $\underline{b}'^T_{KOi}$ den i-ten Zeilenvektor der Matrix $\underline{B}'_{KO}$ kennzeichnet und $v_i$ die i-te Komponente des Störvektors $\underline{v}$ nach Gl.(4.19) ist. Die $\mathcal{Z}$-Transformation von Gl.(4.306) liefert

$$e_{Mi}(z) = z^{-\bar{d}_e - d_i^a} [\mu_i(z) - \underline{b}_{KOi}^{'T} \underline{u}_{dI}(z) + \underline{p}_i^T \underline{x}_i(z)] + v_i(z);$$

$$i = 1, \ldots, q . \qquad (4.307)$$

Nun werden die asymptotisch stabilen und minimalphasigen Filter

$$F_i(z^{-1}) = \frac{f_{ZiO} + F_{Zi}^*(z^{-1})\ z^{-1}}{1 + F_{Ni}^*(z^{-1})\ z^{-1}} ; \quad i = 1, \ldots, q \qquad (4.308a)$$

mit

$$f_{ZiO} \neq 0; \quad i = 1, \ldots, q \qquad (4.308b)$$

$$f_{ZiO} + F_{Zi}^*(z^{-1})\ z^{-1} \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1; \quad i = 1, \ldots, q \qquad (4.308c)$$

$$1 + F_{Ni}^*(z^{-1})\ z^{-1} \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1; \quad i = 1, \ldots, q \qquad (4.308d)$$

eingeführt. Multipliziert man Gl.(4.307) auf beiden Seiten mit $F_i(z^{-1})$, so ergibt sich

$$e_{Fi}(z) = z^{-\bar{d}_e - d_i^a} [\mu_{Fi}(z) - \underline{b}_{KOi}^{'T} \underline{u}_{dIF}^{(i)}(z) + \underline{p}_i^T \underline{x}_{Fi}(z)] + v_{Fi}(z);$$

$$i = 1, \ldots, q \qquad (4.309)$$

mit den gefilterten Signalen

$$e_{Fi}(z) = F_i(z^{-1})\ e_{Mi}(z); \quad i = 1, \ldots, q \qquad (4.310a)$$

$$\mu_{Fi}(z) = F_i(z^{-1})\ \mu_i(z); \quad i = 1, \ldots, q \qquad (4.310b)$$

$$\underline{u}_{dIF}^{(i)}(z) = F_i(z^{-1})\ \underline{u}_{dI}(z); \quad i = 1, \ldots, q \qquad (4.310c)$$

$$\underline{x}_{Fi}(z) = F_i(z^{-1})\ \underline{x}_i(z); \quad i = 1, \ldots, q \qquad (4.310d)$$

$$v_{Fi}(z) = F_i(z^{-1})\ v_i(z); \quad i = 1, \ldots, q . \qquad (4.310e)$$

Man beachte, daß im Unterschied zu den Signalvektoren $\underline{x}_i$, die nach Gl.(4.24) alle (d. h. für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$) den Hilfssignalvektor $\underline{u}_{dI}$ enthalten, die gefilterten Signalvektoren $\underline{x}_{Fi}$ mit den gefilterten Hilfssignalen $\underline{u}_{dIF}^{(i)}$ gebildet werden. Sind die Filter $F_i(z^{-1})$ für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ verschieden, so sind dies auch die Signalvektoren $\underline{u}_{dIF}^{(i)}$, was eine etwas kompliziertere Formulierung des Stellgesetzes mit sich bringt.

Das Stellgesetz nach Gl.(4.14) kann unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.12), (4.15), (4.23) und (4.24) auch zeilenweise in der Form

$$-\mu_i(k) + \underline{b}_{KOi}'^{T}\, \underline{u}_{dI}(k) - \hat{\underline{p}}_i^{T}(k-1)\, \underline{x}_i(k) \equiv 0; \quad i = 1, \ldots, q \qquad (4.311)$$

geschrieben werden. Dies führt auf die Idee, bei Verwendung der Filter $F_i(z^{-1})$ dem Stellgesetz die Beziehung

$$-\mu_{Fi}(k) + \underline{b}_{KOi}'^{T}\, \underline{u}_{dIF}^{(i)}(k) - \hat{\underline{p}}_i^{T}(k-1)\, \underline{x}_{FI}(k) \equiv 0; \quad i = 1, \ldots, q \qquad (4.312)$$

zugrunde zu legen, bei der die gefilterten Signale benutzt werden. Addiert man die um das Zeitintervall $-\bar{d}_e - d_i^a$ verschobene linke Seite

$$-\mu_F(k-\bar{d}_e-d_i^a) + \underline{b}_{KOi}'^{T}\, \underline{u}_{dIF}^{(i)}(k-\bar{d}_e-d_i^a)$$

$$- \hat{\underline{p}}_i^{T}(k-\bar{d}_e-d_i^a-1)\, \underline{x}_{Fi}(k-\bar{d}_e-d_i^a) \equiv 0$$

von Gl.(4.312), die ebenfalls identisch verschwindet, auf die rechte Seite der in den Zeitbereich zurücktransformierten Gleichung (4.309), so erhält man das Schätzproblem

$$e_{Fi}(k) = [\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a-1)]^T\, \underline{x}_{Fi}(k-\bar{d}_e-d_i^a) + v_{Fi}(k); \quad i = 1, \ldots, q\,. \qquad (4.313)$$

Gl.(4.313) ist wieder mit Gl.(4.26) formal identisch, lediglich die einzelnen Signale sind durch ihre gefilterten Versionen er-

setzt. Der Adaptionsalgorithmus nach Gln.(4.55), (4.46) und (4.48) bis (4.55b) garantiert damit zumindest im störungsfreien Fall die Konvergenz der Signale $e_{Fi}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} e_{Fi}(k) = 0; \quad i = 1, \ldots, q, \tag{4.314}$$

falls auch dort die Signale $e_{Mi}$ und $\underline{x}_i$ durch ihre gefilterten Versionen $e_{Fi}$ und $\underline{x}_{Fi}$ ersetzt werden. Für gestörte Systeme gelten die Aussagen von Abschnitt 4.4 entsprechend. Aus der Konvergenz der Signale $e_{Fi}$ folgt entsprechend der Beziehung

$$e_i(z) = \frac{1}{A_{Mi}(z^{-1})}\, e_{Mi}(z) = \frac{1}{A_{Mi}(z^{-1})\, F_i(z^{-1})}\, e_{Fi}(z);$$

$$i = 1, \ldots, q, \tag{4.315}$$

die aus den Gleichungen (4.20) und (4.310a) abgeleitet werden kann, die Konvergenz der natürlichen Fehler, da die Nennerpolynome des Parallelmodells Hurwitzpolynome sind und die Filter $F_i(z^{-1})$ minimalphasig sind. Durch die Wahl von $F_i(z^{-1})$ können Pole und Nullstellen von Gl.(4.315) innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene beliebig vorgegeben werden, und der Einfluß des Parallelmodells kann in dieser Beziehung vollständig kompensiert werden.

Es bleibt noch die Aufgabe, aus Gl.(4.312) das Stellgesetz zu bestimmen. Bezeichnet man mit

$$\hat{\underline{b}}_{Oi}^T(k) = [\hat{b}_{i1O}(k) \ \ldots \ b_{iqO}(k)]; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.316}$$

den i-ten Zeilenvektor der Matrix $\hat{\underline{B}}_O(k)$, so folgt aus Gl.(4.312) mit Gl.(4.23) und der Tatsache, daß entsprechend den Gleichungen (4.310d), (4.24) und (4.310c)

$$\underline{x}_{Fi}^T(k) = [-\underline{u}_{dIF}^{(i)T}(k), \ \bar{\underline{x}}_{Fi}^T(k)]; \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.317a}$$

mit

$$\bar{\underline{x}}_{Fi}(z) = F_i(z^{-1})\, \bar{\underline{x}}_i(z^{-1}); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.317b}$$

ist, die Beziehung

$$[\hat{\underline{b}}_{OI}^{T}(k-1) + \underline{b}'^{T}_{KOi}]\ \underline{u}_{dIF}^{(i)}(k) = \mu_{Fi}(k) + \hat{\underline{p}}_{i}^{T}(k-1)\ \underline{\bar{x}}_{Fi}(k);$$

$$i = 1, \ldots, q\,. \qquad (4.318)$$

Nach Gl.(4.310c) und Gl.(4.308a) gilt ferner

$$\underline{u}_{dIF}^{(i)}(k) = f_{ZiO}\ \underline{u}_{dI}(k) + \mathfrak{Z}^{-1}\{z^{-1}(F_{Zi}^{*}(z^{-1})\ \underline{u}_{dI}(z) - F_{Ni}^{*}(z^{-1})\ \underline{u}_{dIF}^{(i)}(z))\};\quad i = 1, \ldots, q\,. \qquad (4.319)$$

Setzt man Gl.(4.319) in Gl.(4.318) ein, so ergibt sich

$$[\hat{\underline{b}}_{OI}^{T}(k-1) + \underline{b}'^{T}_{KOi}(k-1)]\ \underline{u}_{dI}(k) = \frac{1}{f_{ZiO}}\left[[\hat{\underline{b}}_{Oi}^{T}(k-1) + \underline{b}'^{T}_{KOi}]\,\mathfrak{Z}^{-1}\{z^{-1}[-F_{Zi}^{*}(z^{-1})\ \underline{u}_{dI}(k) + F_{Ni}^{*}(z^{-1})\ \underline{u}_{dIF}^{(i)}(z)]\}\right] + \mu_{Fi}(k) + \hat{\underline{p}}_{i}(k-1)\ \underline{x}_{Fi}(k)];\quad i = 1, \ldots, q\,. \qquad (4.320)$$

Definiert man nun die Signale

$$\bar{\psi}_{i}(k) = \frac{1}{f_{ZiO}}\left[[\hat{\underline{b}}_{Oi}(k-1) + \underline{b}'^{T}_{KOi}]\,\mathfrak{Z}^{-1}\{z^{-1}[-F_{Zi}^{*}(z^{-1})\ \underline{u}_{dI}(z) + F_{Ni}^{*}(z^{-1},\ \underline{u}_{dIF}^{(i)}(z)]\}\right] + \mu_{Fi}(k) + \hat{\underline{p}}_{i}(k-1)\ \underline{x}_{Fi}(k)];\quad i = 1, \ldots, q\,, \qquad (4.321)$$

die genau der rechten Seite von Gl.(4.320) entsprechen, und faßt diese Signale in dem Vektor

$$\bar{\underline{\psi}}^{T}(k) = [\bar{\psi}_{1}(k),\ \bar{\psi}_{2}(k),\ \ldots,\ \bar{\psi}_{q}(k)] \qquad (4.322)$$

zusammen, so kann Gl.(4.320) wieder in der Vektor-Matrix-Form

$$[\hat{\underline{B}}_O(k-1) + \underline{B}'_{KO}]\ \underline{u}_{dI}(k) = \bar{\underline{\psi}}(k) \tag{4.323}$$

geschrieben werden. Unter der Voraussetzung

$$\det\ [\hat{\underline{B}}_O(k-1) + \underline{B}'_{KO}] \neq 0 \tag{4.60}$$

ist $\underline{u}_{dI}(k)$ aus Gl.(4.323) leicht berechenbar. Mit Gl.(3.37) ergibt sich dann aus $\underline{u}_{dI}$ wiederum der Stellvektor $\underline{u}$.

Die Filter $F_i(z^{-1})$ sind nur während der eigentlichen Adaptionsphase wirksam. Damit hat man die Möglichkeit, mit diesen Filtern die adaptiven Transientenvorgänge zu beeinflussen, ohne das Verhalten des Grundregelkreises im angepaßten bzw. näherungsweise angepaßten (vgl. Abschnitt 4.3.1) Zustand zu verändern. Sind nämlich die Reglerparameter $\hat{p}_i$ konstant, d. h.

$$\hat{\underline{p}}_i^T(k) \equiv \underline{p}_i^{*T} = [\underline{b}_{Oi}^{*T},\ \bar{\underline{p}}_i^{*T}];\quad i = 1, \ldots, q, \tag{4.324}$$

so folgt nach z-Transformation aus Gl.(4.318) mit Gln.(4.310b,c,d)

$$[\underline{b}_{Oi}^{*T} + \underline{b}'^{T}_{KOi}]\ F_i(z^{-1})\ \underline{u}_{dI}(z) = F_i(z^{-1})[\underline{u}_i(z) + \bar{\underline{p}}_i^{*T}\ \bar{\underline{x}}_i(z)];$$

$$i = 1, \ldots, q,$$

woraus sich wieder

$$[\underline{b}_{Oi}^{*T} + \underline{b}'^{T}_{KOi}]\ \underline{u}_{dI}(z) = \underline{u}_i(z) + \bar{\underline{p}}_i^{*T}\ \bar{\underline{x}}_i(z);\quad i = 1, \ldots, q \tag{4.325}$$

ergibt. Gl.(4.325) führt für den angepaßten bzw. näherungsweise angepaßten Zustand, in dem $\underline{e}(k) \equiv 0$ ist, auf das implizite Stellgesetz

$$[\underline{B}_O^* + \underline{B}'_{KO}]\ \underline{u}_{dI}(z) = \underline{u}(z) + \bar{\underline{P}}^*\ \bar{\underline{x}}(z), \tag{4.326}$$

wobei

$$\underline{B}_O^* = \lim_{k\to\infty} \hat{\underline{B}}_O(k)$$

und

$$\underline{\bar{P}}^* = \lim_{k\to\infty} \underline{\hat{\bar{P}}}(k)$$

ist. Man erkennt, daß entsprechend Gl.(4.326) nach der Adaption die Filter $F_i(z^{-1})$ im Stellgesetz keine Rolle mehr spielen.

Interessant ist, daß mit den Filtern $F_i(z^{-1})$ die Form der Störung beeinflußt werden kann, die auf den Adaptionsalgorithmus einwirkt, da die gefilterten Fehlersignale $e_{Fi}$ nach Gl.(4.313) von den *gefilterten* Störungen $v_{Fi}$ - und nicht mehr direkt von den Systemstörungen $v_i$ - abhängen. Man kann somit bei stochastischen Störungen versuchen, die hochfrequenten Anteile zu dämpfen, indem man die Filter $F_i(z^{-1})$ als ausgeprägte Tiefpässe entwirft. Allerdings wird dann entsprechend Gl.(4.315) auch die Konvergenz der natürlichen Fehler verlangsamt werden. Das im Abschnitt 4.4.4.3 vorgestellte Konzept zur Unterdrückung des Einflusses sprungförmiger Störungen ergibt sich als Spezialfall der hier vorgestellten Modifikation mit

$$F_i(z^{-1}) = F_D(z^{-1}) = 1-z^{-1}; \quad i = 1, \ldots, q . \tag{4.327}$$

Da allerdings $F_D(z^{-1})$ nichtminimalphasig ist, d. h. Gl.(4.308c) nicht erfüllt, ist die Stabilität der natürlichen Fehler nicht mehr garantiert (vgl. auch Abschnitt 4.4.4.3).

Obwohl die Einführung der Filter $F_i(z^{-1})$ den theoretischen Vorteil bietet, daß der Adaptionsvorgang zusätzlich beeinflußt werden kann, bringt die Filterung der Signale $\underline{x}_i$ und die Berechnung der Stellgröße nach Gl.(4.323) für die Realisierung des Reglers eine erhebliche Erhöhung des Aufwandes sowohl bezüglich des benötigten Speicherplatzes als auch der Rechenzeit mit sich.

## 4.6. Implementierung des adaptiven Mehrgrößenreglers auf dem Prozeßrechner

In diesem Abschnitt sollen noch einmal die notwendigen Gleichungen, die für eine programmtechnische Realisierung des adaptiven Reglers

benötigt werden, zusammengestellt werden. Dabei wird von dem Regler nach Abschnitt 4.2 ausgegangen, da die Modifikationen nach Abschnitt 4.4 und Abschnitt 4.5, falls sie gewünscht werden, sich einfach in das Regelkonzept nach Abschnitt 4.2 einfügen lassen.

Betrachtet wird das implizite Stellgesetz

$$[\hat{\underline{B}}_O(k-1) + \underline{B}'_{KO}]\ \underline{u}_{dI}(k) = \underline{\mu}(k) + \hat{\underline{\bar{P}}}(k-1)\ \underline{\bar{x}}(k) \qquad (4.14)$$

des adaptiven Reglers. Eine Berechnung von $\underline{u}_{dI}$ direkt aus Gl. (4.14) ist programmtechnisch wenig sinnvoll, da die Matrix $\hat{\underline{\bar{P}}}$ nach Gl.(4.15) viele strukturell bedingte Nullelemente enthält, die selbstverständlich in einem Programm nicht abgespeichert werden müssen. Definiert man die Signale

$$\psi_i(k) = \mu_i(k) + \hat{\underline{\bar{p}}}_i^T(k-1)\ \underline{\bar{x}}_i(k); \quad i = 1, \ldots, q\,, \qquad (4.328)$$

wobei die Vektoren $\hat{\underline{\bar{p}}}_i$ die Schätzwerte der Parametervektoren $\underline{\bar{p}}_i$ nach Gl.(4.7) kennzeichnen und die Signalvektoren $\underline{\bar{x}}_i$ in Gl.(4.10) definiert sind, und bildet wieder den Vektor

$$\underline{\psi}^T(k) = [\psi_1(k), \psi_2(k), \ldots, \psi_q(k)], \qquad (4.329)$$

so kann Gl.(4.14) unter Berücksichtigung der Struktur der Matrix $\hat{\underline{\bar{P}}}$ nach Gl.(4.15) und des Vektors $\underline{\bar{x}}$ nach Gl.(4.12) in der Form

$$[\hat{\underline{B}}_O(k-1) + \underline{B}'_{KO}]\ \underline{u}_{dI}(k) = \underline{\psi}(k) \qquad (4.330)$$

dargestellt werden.

Die Signalvektoren $\underline{\bar{x}}_i$ müssen nicht für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ einzeln abgespeichert werden. Nach Gl.(4.10) enthalten *alle* diese Vektoren den gesamten Hilfsvektor $\underline{u}_{dI}$. Damit können die Signalvektoren $\underline{\bar{x}}_i$ aus dem im Programm abzuspeichernden Vektor SIGVEK nach Bild 4.11 gewonnen werden. Die Auswahl, welche der in SIGVEK gespeicher-

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\underline{u}_{dI}^{T}(k-1)$ | $\underline{u}_{dI}^{T}(k-2)$ | ... | $\underline{u}_{dI}^{T}(k-n_{Emax})$ |
| | | | |
| $y_1(k)$ | $y_1(k-1)$ | ... | $y_1(k-n(S_{I1}))$ |
| | | | |
| $y_2(k)$ | $y_2(k-1)$ | ... | $y_2(k-n(S_{I2}))$ |
| $\vdots$ | | | |
| $y_q(k)$ | $y_q(k-1)$ | ... | $y_q(k-n(S_{I3}))$ |

Bild 4.11. Schematische Darstellung des im Programm abzulegenden Signalvektors SIGVEK mit $n_{Emax} = \max_{\substack{1\le i\le q \\ 1\le j\le q}} \{n(E_{ij})\}$

ten Signale zu einem bestimmten Signalvektor $\underline{\bar{x}}_i$ gehören, wird zweckmäßigerweise durch eine Adressenmatrix festgelegt, die bei der Konfiguration des Reglers bestimmt wird. Unter Konfiguration des Reglers wird die Angabe der a priori festzulegenden Größen wie die Anzahl q der Ein- und Ausgänge der Regelstrecke, der Ordnungen der Polynome $A_i(z^{-1})$ und $B_{ij}(z^{-1})$, der Schrittverzögerungen $d_i^a$ und $d_i^e$ $(i,j \in \{1,\ldots,q\})$, der Anzahl $n_z + 1$ der gewünschten freien Integratoren und die Eingabe von Parallelmodell, Korrekturnetzwerk und Vorfilter verstanden. Allein von diesen Daten hängen die Grade der Polynome $E_{ij}(z^{-1})$ nach Gl.(4.2) und $S_{Ii}(z^{-1})$ nach Gl.(2.92) und damit die Adressen der in den Signalvektoren $\underline{\bar{x}}_i$ nach Gl.(4.10) zusammengefaßten Komponenten des Vektors SIGVEK ab.

Um die Rechenzeit zwischen Messung der aktuellen Regelgrößen und Ausgabe der aktuellen Stellgrößen, die sich wie eine Reglertot-

zeit auswirkt, vernachlässigbar klein zu halten, ist es günstig, alle im impliziten Stellgesetz nach Gl.(4.330) enthaltenen Ausdrücke, die nicht von den aktuellen Regelgrößen abhängen, bereits einen Abtastschritt vorher nach der Stellgrößenausgabe vorauszuberechnen. Wie dies geschehen kann, soll im folgenden gezeigt werden. Da die Matrix $\underline{D}_a(z^{-1})$ laut Voraussetzung V2.1 in jedem Diagonalelement mindestens eine Schrittverzögerung von einem Abtastschritt enthält, hängt der aktuelle Ausgangssignalvektor $\underline{y}_K(k)$ des Korrekturnetzwerks nach Gl.(3.35) nur von vergangenen Signalen ab. D. h. er ist bereits zum Zeitpunkt k-1 berechenbar. Der aktuelle Signalvektor $\underline{\mu}(k)$ hängt nach Gl.(4.1) von dem aktuellen gefilterten Sollwertvektor $\underline{w}_V(k)$ und dem aktuellen Ausgangsvektor $\underline{y}_K(k)$ des Korrekturnetzwerks und sonst ebenfalls nur von vergangenen Signalen ab. Da der Sollwert zum Zeitpunkt k auch schon zum Zeitpunkt k-1 festgelegt werden kann und $\underline{y}_K(k)$ ebenfalls zum Zeitpunkt k-1 berechenbar ist, kann somit der gesamte Signalvektor $\underline{\mu}(k)$ bereits zum Zeitpunkt k-1 bestimmt werden. Entsprechend den Definitionen nach Gl.(4.7) und Gl.(4.10) enthält jedes Skalarprodukt $\hat{\underline{p}}_i^T(k-1)\ \underline{\bar{x}}_i(k)$ außer vergangenen Signalen nur den von den aktuellen Regelgrößen $y_i(k)$ abhängenden Term $\hat{s}_{IiO}(k-1)\ y_i(k)$ $(i \in \{1,\ldots,q\})$, wobei mit $\hat{s}_{IiO}$ die Schätzwerte der Absolutkoeffizienten $s_{IiO}$ der Polynome $S_{Ii}(z^{-1})$ bezeichnet werden. Die von den aktuellen Regelgrößen abhängenden Terme $\hat{s}_{IiO}(k-1)\ y_i(k)$ werden jetzt aus den Skalarprodukten $\hat{\underline{p}}_i^T(k-1)\ \underline{\bar{x}}_i(k)$ explizit herausgezogen. Dazu werden die modifizierten Parametervektoren $\tilde{\underline{p}}_i$ eingeführt, die sich von $\hat{\underline{p}}_i$ lediglich dadurch unterscheiden, daß sie nicht mehr den Schätzwert $\hat{s}_{IiO}$ enthalten. Ebenso werden die modifizierten Signalvektoren $\tilde{\underline{x}}_i(k)$ benutzt, die im Unterschied zu $\underline{\bar{x}}_i(k)$ nicht die aktuelle Regelgröße $y_i(k)$ enthalten, ansonsten aber gleich aufgebaut sind. Somit gilt

$$\hat{\underline{p}}_i^T(k-1)\ \underline{\bar{x}}_i(k) = \tilde{\underline{p}}_i^T(k-1)\ \tilde{\underline{x}}_i(k) + \hat{s}_{IiO}(k-1)\ y_i(k); \quad i = 1, \ldots, q\,. \tag{4.331}$$

Durch Vergleich mit Gl.(4.10) ist zu erkennen, daß die Vektoren $\tilde{\underline{x}}_i(k)$ jetzt nur aus den vergangenen Signalvektoren $\underline{u}_{dI}(k-l)$ und $y_i(k-l)$ mit $l \geq 1$ gebildet werden. Aus diesen Überlegungen ergibt sich, daß die Signale

$$\psi_{1i}(k-1) = \mu_i(k) + \hat{\underline{p}}_i^T(k-1)\ \tilde{\underline{x}}_i(k); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.332}$$

bereits vollständig zum Zeitpunkt k-1 berechnet werden können. Dasselbe gilt auch für die Matrix

$$\hat{\underline{B}}_{OINV}(k-1) = [\hat{\underline{B}}_O(k-1) + \underline{B}'_{KO}]^{-1}. \tag{4.333}$$

Bildet man nun die Vektoren

$$\underline{\psi}_1^T(k-1) = [\psi_{11}(k-1),\ \psi_{12}(k-1),\ \ldots,\ \psi_{1q}(k-1)] \tag{4.334a}$$

und

$$\underline{\psi}_2^T(k) = [\hat{s}_{I1O}(k-1)\ y_1(k),\ \hat{s}_{I2O}(k-1)\ y_2(k),\ \ldots,$$

$$\hat{s}_{IqO}(k-1)\ y_q(k)] \tag{4.334b}$$

so folgt aus Gl.(4.330) unter Berücksichtigung der Gln.(4.331), (4.332) und (4.333)

$$\underline{u}_{dI}(k) = \hat{\underline{B}}_{OINV}(k-1)\ [\underline{\psi}_1(k-1) + \underline{\psi}_2(k)]. \tag{4.335}$$

Mit Hilfe des Signalvektors $\underline{u}_{dI}(k)$ kann nach Gl.(3.37) der Stellvektor $\underline{u}(k)$ gewonnen werden. Aus Gl.(3.37) ergibt sich mit Gl. (2.22d) im Zeitbereich

$$u_i(k) = u_{dIi}(k-\bar{d}_e+d_i^e) - \sum_{l=1}^{n_z+1} \binom{n_z+1}{l} (-1)^l\ u_i(k-l); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.336}$$

für jede Stellgröße $u_i$. Auch in Gl.(4.336) kann das Signal

$$\psi_{3i}(k-1) = -\sum_{l=1}^{n_z+1} \binom{n_z+1}{l} (-1)^l\ u_i(k-l); \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.337}$$

bereits zum Zeitpunkt k-1 berechnet werden. Damit ergibt sich aus Gl.(4.336)

$$u_i(k) = u_{dIi}(k-\bar{d}_e+d_i^e) + \psi_{3i}(k-1); \quad i = 1, \ldots, q . \qquad (4.338)$$

Zur Berechnung der aktuellen Hilfssignale $\underline{u}_{dI}(k)$ muß nach der Messung der aktuellen Regelgrößen $\underline{y}(k)$ lediglich der Vektor $\underline{\psi}_2(k)$ berechnet werden (q Multiplikationen), die Vektoraddition $\underline{\psi}_1(k-1) + \underline{\psi}_2(k)$ (q Additionen) und die Berechnung des Matrix-Vektor-Produktes nach Gl.(4.335) durchgeführt werden. Zur Bestimmung der Stellgrößen $u_i(k)$ sind dann nur noch die q Additionen nach Gl.(4.338) erforderlich. Alle anderen Berechnungen wie die Adaption der Reglerparameter, die Bestimmung des Signalvektors $\underline{\psi}_1(k-1)$, die Berechnung der Signale $\psi_{3i}(k-1)$ nach Gl.(4.337) für $i \in \{1,\ldots,q\}$ und die Inversion der Matrix $\underline{\hat{B}}_0(k-1) + \underline{B}'_{K0}$ können bereits *vor* der Messung der aktuellen Regelgrößen $\underline{y}(k)$ durchgeführt werden. Dies führt dazu, daß die Rechenzeit, die zwischen der Messung der aktuellen Regelgrößen $\underline{y}(k)$ und der Ausgabe der aktuellen Stellgrößen $\underline{u}(k)$ vergeht, drastisch verkürzt wird und nur von der Anzahl der Ein- und Ausgänge der Regelstrecke, nicht aber von deren Ordnung abhängt. Das ist auch eine Folge davon, daß im impliziten Stellgesetz nach Gl.(4.14) - und damit natürlich auch in Gl.(4.335) - die Schätzwerte $\hat{p}_i(k-1)$ der Reglerparameter benutzt werden, die schon zum Zeitpunkt k-1 vorliegen. Theoretisch ist es genauso gut möglich, die aktuellen Schätzwerte $\hat{p}_i(k)$ zum Zeitpunkt k im Stellgesetz zu verwenden. Dann muß allerdings die Adaption der Reglerparameter zwischen der Messung der Regelgrößen $\underline{y}(k)$ und Ausgabe der Stellgrößen $\underline{u}(k)$ durchgeführt werden, was eine erhebliche Erhöhung der Reglertotzeit (insbesondere im Mehrgrößenfall) zur Folge hat.

Für jeden Abtastschritt läßt sich jetzt folgender Regelalgorithmus angeben.

Algorithmus für die Realisierung des adaptiven Reglers nach Abschnitt 4.2 für den Abtastschritt k

1. Messung der Regelgrößen y(k) und Berechnung des Vektors $\underline{\psi}_2(k)$ nach Gl.(4.334b).

2. Berechnung des Hilfsvektors $\underline{u}_{dI}(k)$ nach Gl.(4.335) und des Stellvektors $\underline{u}(k)$ nach Gl.(4.338) und Ausgabe der Stellgrössen.

3. Berechnung des natürlichen Fehlervektors nach Gl.(3.8)

$$\underline{e}(k) = \underline{y}_M(k) - \underline{y}(k) - \underline{y}_K(k)$$

und des gefilterten Fehlervektors nach Gl.(4.20)

$$\underline{e}_M(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{\underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{e}(z)\}.$$

4. Berechnung der Signale

$$h_i(k) = [\hat{\underline{p}}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a-1) - \hat{\underline{p}}_i(k-1)]^T\ \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a);$$
$$i = 1, \ldots, q. \qquad (4.45)$$

Es ist nicht sinnvoll, die Signale $h_i(k)$ direkt nach Gl.(4.45) zu berechnen, da dazu die geschätzten Reglerparameter $\hat{\underline{p}}_i(k)$ für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$ mindestens $\bar{d}_e+d_i^a$ Abtastschritte im Echtzeitprogramm gespeichert werden müssen, was einen erheblichen Speicherplatzbedarf nach sich zieht. Wie bereits in Abschnitt 4.5.2 erwähnt, kann das implizite Stellgesetz nach Gl.(4.14) unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.12), (4.15), (4.23) und (4.24) zeilenweise in die Beziehungen

$$\hat{\underline{p}}_i^T(k-1)\ \underline{x}_i(k) = \mu_i(k) - \underline{b}_{KOi}'^T\ \underline{u}_{dI}(k);\quad i = 1, \ldots, q$$
$$i = 1, \ldots, q \qquad (4.339)$$

zerlegt werden, wobei mit $\underline{b}_{KOi}'^T$ der i-te Zeilenvektor der Matrix $\underline{B}_{KO}'$ bezeichnet wird. Setzt man Gl.(4.339) um $\bar{d}_e+d_i^a$ Abtastschritte verschoben in Gl.(4.45) ein, so ergibt sich

$$h_i(k) = \mu_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) - \underline{b}_{KOi}'^T\ \underline{u}_{dI}(k-\bar{d}_e-d_i^a)$$
$$- \hat{\underline{p}}_i^T(k-1)\ \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a);\ i = 1, \ldots, q. \qquad (4.340)$$

Nach Gl.(4.340) müssen nur die Signale $\mu_i$ für $i \in \{1,\ldots,q\}$ und nicht die Parametervektoren $\hat{\underline{p}}_i$ $\bar{d}_e+d_i^a$ Abtastschritte lang abgespeichert werden, wodurch erheblich Speicherplatz gespart werden kann.

5. Berechnung der vermehrten Fehler nach Gl.(4.46)

$$\bar{e}_i(k) = e_{Mi}(k) + h_i(k); \quad i = 1, \ldots, q .$$

6. Adaption der Reglerparameter $\hat{\underline{p}}_i(k)$ nach Gln.(4.48) bis (4.55b) für i = 1 bis q mit anschließender Überprüfung, ob $\hat{\underline{B}}_O(k) + \underline{B}'_{KO}$ invertierbar ist.

Zur Überprüfung der Invertierbarkeit der Matrix $\hat{\underline{B}}_O(k) + B'_{KO}$ wird untersucht, ob

$$|\det[\hat{\underline{B}}_O(k) + \underline{B}'_{KO}]| \geq \varepsilon_B > 0$$

ist, wobei $\varepsilon_B$ eine a priori festgelegte numerische Schranke ist. Ist dies nicht der Fall, so wird $\underline{B}'_{KO}$ entsprechend verändert.

7. Berechnung von

$$\hat{\underline{B}}_{OINV}(k) = [\hat{\underline{B}}_O(k) + \underline{B}'_{KO}]^{-1}$$

8. Vorausberechnungen

8.1. Berechnung von $\underline{y}_M(k+1)$ nach Gl.(2.37)

$$\underline{y}_M(k+1) = \mathcal{Z}^{-1}\{\underline{A}_M^{-1}(z^{-1})\ z\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}_M(z^{-1})\ z^{-\bar{d}_e}\ \underline{w}_V(z)\}.$$

8.2. Berechnung von $\underline{y}_K(k+1)$ nach Gl.(3.35)

$$\underline{y}_K(k+1) = \mathcal{Z}^{-1}\{\underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\ z\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{B}'_K(z^{-1})\ z^{-\bar{d}_e}\ \underline{u}_{dI}(z)\}.$$

8.3. Berechnung des gefilterten Sollwertvektors

$$\underline{w}_V(k+1) = \mathcal{Z}^{-1} \{\underline{G}_V(z^{-1}) \mathcal{Z}\{\underline{w}(k+1)\}\}. \qquad (2.39)$$

8.4. Berechnung von $\underline{\mu}(k+1)$ nach Gl.(4.1)

$$\underline{\mu}(k+1) = \mathcal{Z}^{-1} \{\underline{B}_M(z^{-1}) \mathcal{Z}\{\underline{w}_V(k+1)\}$$
$$+ [-\underline{B}_K^*(z^{-1}) + \underline{R}_K(z^{-1}) \underline{B}_K(z^{-1})] \underline{u}_{dI}(z)$$
$$+ \underline{S}_K(z^{-1}) \mathcal{Z}\{\underline{y}_K(k+1)\}\}.$$

9. Berechnung der Elemente $\psi_{1i}(k)$ des Signalvektors $\underline{\psi}_1(k)$ nach Gl.(4.332) und der Signale $\psi_{3i}(k)$ für i = 1 bis q nach Gl.(4.337).

Ein besonderes Problem stellen Stellgrößenbegrenzungen dar. Um ein wind-up des Reglers und der Schätzung zu verhindern, ist es sinnvoll, in allen Beziehungen des Reglers die tatsächlich ausgegebenen, also die begrenzten Stellgrößen zu verwenden (Åström (1980)). Die Hilfsgrößen $\underline{u}_{dI}(k)$ müssen dann nach der Stellgrößenausgabe noch einmal mit Gl.(4.336) so berechnet werden, daß ihr Wert den tatsächlich ausgegebenen und damit evtl. begrenzten Stellgrößen entspricht. D. h. die Begrenzung der Stellgrößen muß auf die äquivalente Begrenzung der Hilfsgrößen $\underline{u}_{dI}$ zurückgerechnet werden. Eine einzige Ausnahme bildet hier Gl.(4.340) zur Berechnung der Signale $h_i$. Da Gl.(4.339) nur für die nach dem impliziten Stellgesetz, Gl.(4.14), und damit nach Gl.(4.335) berechneten unbegrenzten Werte $\underline{u}_{dI}$ gültig ist, müssen in Gl.(4.340) auch stets die nach Gl.(4.335) berechneten Werte $\underline{u}_{dI}(k-\bar{d}_e-d_i^a)$ eingesetzt werden, die bei Stellgrößenbegrenzungen dann zusätzlich abzuspeichern sind.

## 4.7. Zusammenfassung

In diesem Kapitel ist der im Kapitel 3 vorgestellte Regler zu einem adaptiven Regler erweitert worden. Als a priori-Information über die Struktur der Regelstrecke müssen Maximalabschätzungen bezüglich der Ordnungen der Einzelübertragungsfunktionen und Minimalabschätzungen bezüglich der einzelnen Schrittverzögerungen

der Regelstrecke vorliegen. Der Adaptionsalgorithmus wird so entworfen, daß im störungsfreien Fall die Ausgangsgrößen $y_E$ der erweiterten Regelstrecke gegen die Ausgangsgrößen $y_M$ des Parallelmodells konvergieren. Dies gilt unabhängig von den Parametern der Regelstrecke, die allerdings während des eigentlichen Anpassungsvorganges als näherungsweise konstant angenommen werden. Dies wird implizit bei dem Beweis von Satz 4.1 vorausgesetzt. Alle im Regelkreis auftretenden Signale bleiben auch bei dem adaptiven Regler beschränkt, wenn die Stabilitätsbedingung Gl.(3.7) erfüllt ist, d. h. wenn die erweiterte Regelstrecke eine stabile Inverse besitzt. Dies muß durch die Wahl eines geeigneten Korrekturnetzwerkes gewährleistet werden. Bei stabilen Regelstrecken sind hierfür im Prinzip keine a priori-Kenntnisse über die Streckenparameter erforderlich, wenn im Grundregelkreis ein Regler ohne explizites I-Verhalten verwendet wird. Für den praktisch wichtigen Fall eines Reglers mit einfachem I-Verhalten müssen lediglich das Vorzeichen und die Größenordnungen der (statischen) Verstärkungsfaktoren der Einzelübertragungsfunktionen der Regelstrecke abgeschätzt werden. Bei instabilen Regelstrecken ist allerdings eine a priori-Information über den Parameterbereich der Regelstrecke erforderlich.

Bei der theoretischen Analyse des Störverhaltens zeigt sich, daß der adaptive Regler garantiert stabil bleibt, wenn das Einstellgesetz für die Reglerparameter so modifiziert wird, daß ihre Beschränktheit gewährleistet ist. Durch Einführung von freien Integratoren im Grundregelkreis können bei rein deterministischen Störungen die natürlichen Fehler für große Zeiten beliebig klein gemacht werden. Es tritt hier das interessante Phänomen auf, daß eine schnelle Konvergenz der natürlichen Fehler mit einer zusätzlichen Fehlanpassung, d. h. einem "Detuning" des Reglers verbunden sein kann.

Treten stochastische und deterministische Störungen gleichzeitig auf, so sind die natürlichen Fehler betragsmäßig immer größer als eine von den stochastischen Störungen abhängende Schranke. Um in stark stochastisch gestörten Systemen einerseits eine schnelle

Konvergenz der natürlichen Fehler bei fehlangepaßtem Regler, andererseits aber auch eine kleine Varianz der natürlichen Fehler bei näherungsweise angepaßtem Regler zu erzielen, werden variable Gewichtungsfaktoren vorgeschlagen.

Ist die Regelstrecke instabil und kann aufgrund ihrer Pol-Nullstellenverteilung mit einem stabilen Korrekturnetzwerk für alle Parameterkombinationen der Regelstrecke die Stabilitätsbedingung Gl.(3.7) nicht erfüllt werden, wie es in Abschnitt 3.5.1.1 an einem Beispiel diskutiert wird, so scheint das hier vorgestellte Konzept wenig sinnvoll. In diesem Fall ist die Methode der adaptiven Polverschiebung (vgl. z. B. Prager und Wellstead (1979)) vorzuziehen. Hierbei handelt es sich um ein Verfahren, bei dem explizit ein mathematisches Modell der Regelstrecke rekursiv geschätzt und in jedem Abtastschritt der Regler nach der Methode der Polvorgabe unter Verwendung des geschätzten Streckenmodells entworfen wird. Mit diesem Verfahren kann die Regelung stabilisiert werden, vorausgesetzt, die Parameterschätzung konvergiert im gestörten System in dem Sinne, daß die geschätzten Streckenparameter für $k \to \infty$ konstante Werte annehmen. Allerdings hat es den Nachteil, daß die Berechnung des Reglers mit den Schätzwerten der Streckenparameter in jedem Abtastschritt sehr aufwendig ist und dadurch, daß die Nullstellen der Regelstrecke völlig unberücksichtigt bleiben, das dynamische Verhalten der Regel- und Stellgrößen von dem erwarteten Verhalten erheblich abweichen kann. Aus diesen Gründen mag es in solchen Fällen, wo die Regelstrecke durch eine lineare Rückführung der Regelgrößen einfach stabilisiert werden kann, doch günstiger sein, die Struktur nach Bild 3.7, die ohne weiteres auch auf den Mehrgrößenfall übertragen werden kann, zu verwenden und den Kompensator mit den in diesem Abschnitt gezeigten Methoden direkt als adaptiven Kompensator auszulegen. Dies kann jedoch nur im konkreten Anwendungsfall entschieden werden.

# 5. Experimentelle Erprobung des Regelkozepts an Pilotanlagen

## 5.1. Vorbemerkungen

Während die vorliegende Arbeit entstand, wurde das vorgestellte Regelkonzept auch experimentell an zwei Versuchsanlagen erprobt. Die theoretischen Untersuchungen, die durch die Experimente angeregt wurden, sind bereits in den vorangegangenen Kapiteln enthalten. Aus "historischen" Gründen wurde bei den Experimenten der adaptive Regler in einer gegenüber Abschnitt 4.2 etwas modifizierten Version nach Anhang A 9 realisiert. Diese Version unterscheidet sich von dem in Abschnitt 4.2 vorgestellten Konzept nur durch die etwas anders geartete Schätzung der in der Matrix $\underline{B}_O$ zusammengefaßten Parameter $b_{ijO}$ der Regelstrecke. Im angepaßten Zustand sind beide Regler identisch. Auch der Adaptionsalgorithmus zur Erstellung der Reglerparameter ist gleich und führt auf die gleichen Stabilitätseigenschaften. Durch vergleichende Simulationen wurde bestätigt, daß beide Verfahren physikalisch weitgehend identische Eigenschaften haben, so daß die mit der Version nach Anhang A 9 des adaptiven Reglers durchgeführten Experimente auch für die in Abschnitt 4.2 behandelte Version Aussagekraft haben. Allerdings ist die Realisierung des Reglers nach Abschnitt 4.2 einfacher und übersichtlicher, so daß diese bei einem zukünftigen Einsatz des adaptiven Reglers vorzuziehen ist.

## 5.2. Adaptive Regelung eines Turbogenerators

### 5.2.1. Die Regelstrecke und prinzipielle Anforderungen an die Regelung

In diesem Abschnitt wird die Anwendung des adaptiven Regelungskonzeptes auf einen Turbogeneratorsatz beschrieben. Bei dem Turbogeneratorsatz handelt es sich um die in Bild 5.1 schematisch dargestellte Laboranlage. Eine Luftdruckturbine treibt einen fremderregten Synchrongenerator an, der ein symmetrisches Drehstromnetz

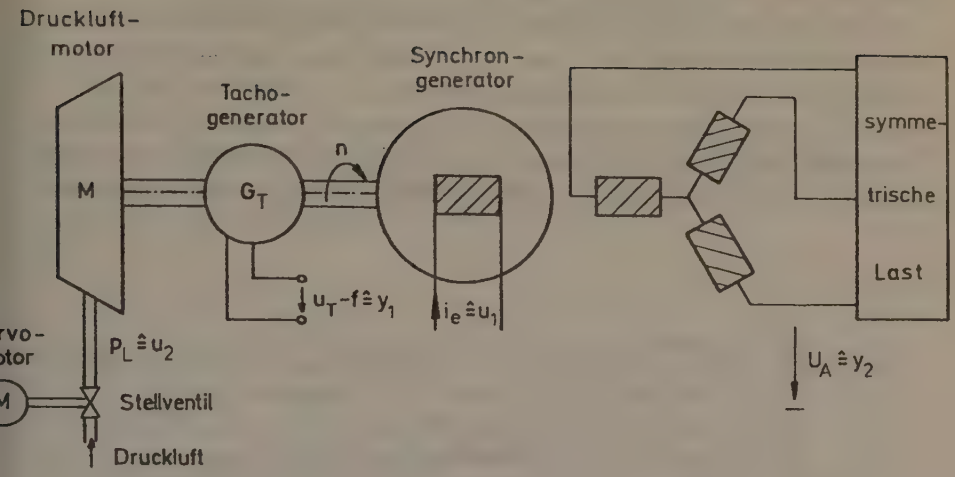



Bild 5.1. Schematische Darstellung des Turbogenerators

speist, das nur aus Ohmschen Widerständen besteht, in dem also nur Wirklast verbraucht wird. Der Lastwiderstand $R_L$ kann zwischen den Punkten $R_L$ = 1.8Ω und $R_L$ = 2.8Ω pro Phase umgeschaltet werden.

Die Regelaufgabe besteht darin, die Frequenz f und den Effektivwert $U_A$ der Phasenspannung einerseits bei Laständerungen konstant zu halten, sowie andererseits Arbeitspunktwechsel möglichst ohne Überschwingen dieser Größen durchzuführen. Als Stellgrößen stehen hierzu der Erregerstrom $i_e$ des Synchrongenerators und der Versorgungsdruck $p_L$ der Turbine zur Verfügung. Der Luftdruck $p_L$ ist über ein Servoventil einstellbar, während der Erregerstrom $i_e$ mittels einer Stromquelle eingeprägt wird. Die Frequenz f der Spannung ist proportional zur Drehzahl, die mit Hilfe eines auf der gleichen Welle montierten Tachogenerators gemessen wird. Statt den Effektivwert der Wechselspannung zu messen, was relativ aufwendig ist, wird die über einen Brückengleichrichter gleichgerichtete Spannung erfaßt, deren Gleichrichtwert dem Effektivwert

der Wechselspannung proportional ist. Um die Wechselanteile der gemessenen Tachogeneratorspannung und der Ausgangsspannung des Brückengleichrichters auf etwa 1% zu begrenzen, werden Tiefpässe eingeführt, deren Zeitkonstanten jedoch noch wesentlich kleiner sind als die Zeitkonstanten der Regelstrecke . Bild 5.2 zeigt das Blockschaltbild der Regelstrecke einschließlich der Meß- und Stellglieder. Konstante Werte $\bar{U}_1$ und $\bar{U}_2$ werden zu den dynamischen Ein-

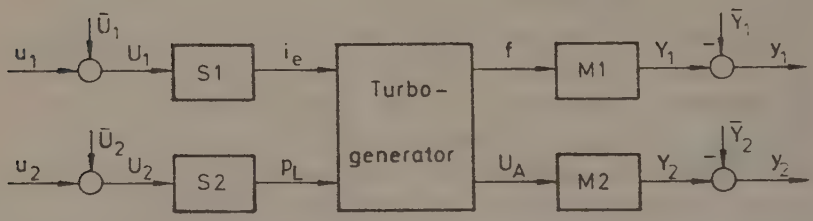



Bild 5.2. Blockdiagramm der Regelstrecke einschließlich Stell (S)- und Meßglieder (M)

gängen $u_1$ und $u_2$ addiert, um für $u_1 \equiv 0$ und $u_2 \equiv 0$ die Anlage in einen definierten statischen Ausgangszustand zu fahren. Offsets $\bar{Y}_1$ und $\bar{Y}_2$ werden von den Meßgrößen $Y_1$ und $Y_2$ subtrahiert, so daß für $u_1 \equiv 0$ und $u_2 \equiv 0$ auch die dynamischen Ausgangssignale $y_1$ und $y_2$ identisch Null sind. Die dynamischen Eingänge $u_1$ und $u_2$ werden direkt von dem Prozeßrechner generiert, während die dynamischen Ausgangsgrößen $y_1$ und $y_2$ als Meßgrößen vom Prozeßrechner erfaßt werden. Diese dynamischen Signalgrößen werden hier direkt als Stell- bzw. Regelgrößen bezeichnet (obwohl sie nur den dynamischen Anteil der physikalischen Stell- und Regelgrößen bezogen auf die definierte statische Voreinstellung darstellen) und der Einfachheit halber als normierte Werte betrachtet.

Das Stellventil hat eine nichtlineare Kennlinie, die ähnlich zu der Funktion $p_L \sim \text{arctg}(\alpha U_2)$ mit $\alpha$=const verläuft. Die stationäre

Ausgangsspannung $U_A$ ist proportional dem Produkt aus dem magnetischen Fluß $\Psi$ und der Drehzahl bzw. der Frequenz f, d. h.

$$U_A \sim f\,\Psi(i_e). \tag{5.1}$$

Der magnetische Fluß $\Psi$ wiederum ist eine nichtlineare Funktion des Erregerstroms $i_e$. Für die dynamischen Ein- und Ausgangssignale ergibt sich damit aus Gl.(5.1)

$$y_2 \sim y_1\,\tilde{\Psi}(u_1) \tag{5.2}$$

wobei die Funktion $\tilde{\Psi}$ sich von dem magnetischen Fluß $\Psi$ nur durch die Normierung unterscheidet. Gl.(5.2) deutet bereits auf das nichtlineare Verhalten der Regelstrecke hin. Fresewinkel (1981) gibt eine detaillierte Beschreibung der Versuchsanlage.

Für die Experimente wurden zwei Arbeitspunkte (AP) nach Tabelle 5.1 gewählt.

| | $y_1$ | f/Hz | | $y_2$ | $U_A$/V |
|---|---|---|---|---|---|
| AP1 | 0.238 | 100 | | 0.143 | 6.5 |
| | 0 | 80 | | 0 | 6.0 |
| AP2 | -0.238 | 60 | | -0.286 | 5.0 |

Tabelle 5.1. Gewählte Arbeitspunkte (AP) mit den Beziehungen zwischen den normierten dynamischen Regelgrößen $y_1$ und $y_2$ und den physikalischen Größen Frequenz f und Effektivwert $U_A$. Die Beziehungen sind linear.

Bild 5.3 zeigt die gemessenen, auf den Einheitssprung normierten Sprungantworten

$$h_{ij}(t) = y_i(t) \text{ für } \begin{cases} u_j(t) = 1 \\ u_l(t) = 0;\ l \neq j \end{cases};\quad i,j=1,2 \tag{5.3}$$

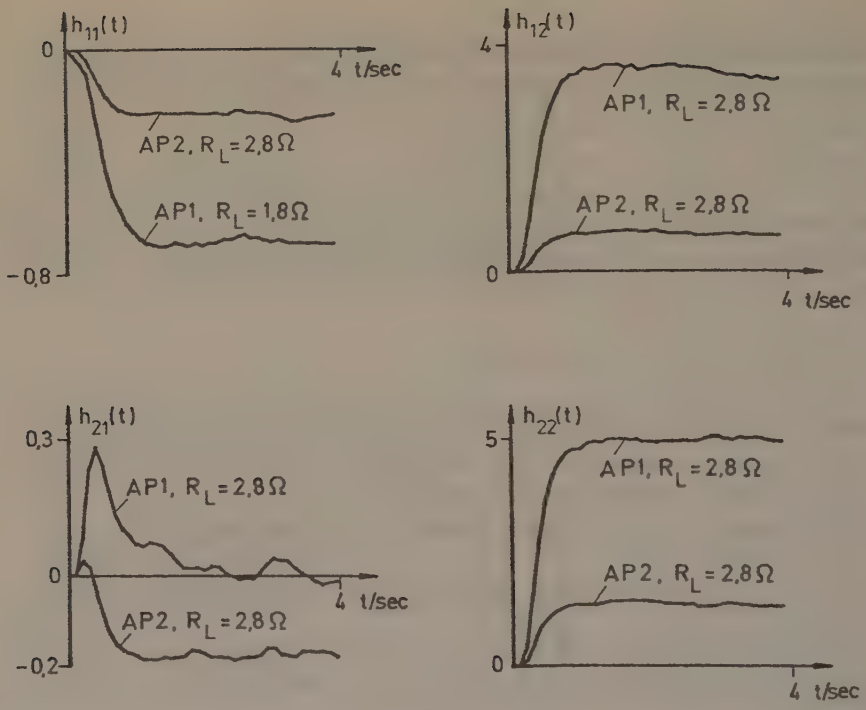



Bild 5.3. Gemessene auf den Einheitssprung bezogene Sprungantworten unter verschiedenen Arbeitsbedingungen

für verschiedene Arbeitspunkte und Lastzustände. Dazu wurde die Regelstrecke unter den angegebenen Arbeitsbedingungen mit sehr kleinen Sprüngen beaufschlagt, so daß das dynamische Verhalten näherungsweise als linear betrachtet werden kann. Bild 5.3 vermittelt einen Eindruck über die Variationen der Parameter, die mit linearisierten Streckenmodellen für die angegebenen Arbeitsbedingungen verbunden sind. In Tabelle 5.2 sind die charakteristischen Daten der kontinuierlichen Übertragungsmatrix für AP1, $R_L$=2.8Ω, aufgeführt. Diese Übertragungsmatrix wurde aus den Sprungantworten mit Hilfe des Prony-Verfahrens (Lacroix (1973)) berechnet. In Tabelle 5.3 sind die charakteristischen Daten der diskreten Übertragungsmatrix für die gewählte Abtastzeit von T=0.1 sec gelistet. Die Regelstrecke ist stabil, erfüllt aber aufgrund der Nullstellen bei

| | Ordnung | Pole | Nullstellen | Verstärkung |
|---|---|---|---|---|
| $G_{11}(s)$ | 2 | -1.68038 ±j1.91996 | 20.3002 | -0.629389 |
| $G_{12}(s)$ | 2 | -2.96353 ±j2.78412 | 17.3900 | 3.47702 |
| $G_{21}(s)$ | 3 | -2.33728; -3.05317 ±j7.26545 | 0.147600; 12.6878 | -0.02 |
| $G_{22}(s)$ | 2 | -3.41406 ±j2.91608 | 16.4150 | 5.04969 |
| Nullstellen von det $\underline{B}(s)$ (≙ Übertragungsnullstellen): 17.6127; 14.2453; -1.64346±j3.81830; -3.10974±j3.05780; -1.86201 | | | | |

Tabelle 5.2. Charakteristische Daten einer mit dem Prony-Verfahren ermittelten kontinuierlichen Übertragungsmatrix des Turbogenerators für den Arbeitspunkt AP1, $R_L$=2.8Ω. Das System hat keine Totzeit.

$z_0 = 78.4$ und $z_0 = 10.4$ von det $\underline{B}(z^{-1})$ nicht Voraussetzung V2.3. Entsprechend der Parametrisierung nach Abschnitt 2.1 ergeben sich aus Tabelle 5.3 für die Regelstrecke folgende Strukturdaten:

$$\underline{D}_a(z^{-1}) = z^{-1}\underline{I} \tag{5.4a}$$

$$\underline{D}_e(z^{-1} = \underline{I};\ \bar{d}_e = 0 \tag{5.4b}$$

$$n(A_1) = 4 \tag{5.4c}$$

$$n(B_{11}) = n(B_{12}) = 3 \tag{5.4d}$$

$$n(A_2) = 5 \tag{5.4e}$$

$$n(B_{21}) = n(B_{22}) = 4 \tag{5.4f}$$

| | Ordnung | Pole | Nullstellen | Verstärkung |
|---|---|---|---|---|
| $G_{11}(z^{-1})$ | 2 | 0.829789 ±j0.161303 | -25.2649 | -0.629389 |
| $G_{12}(z^{-1})$ | 2 | 0.714894 ±j0.204343 | 57.3005 | 3.47702 |
| $G_{21}(z^{-1})$ | 3 | 0.791576; 0.550856 ±j0.489453 | 1.01471; 7.29358 | -0.02 |
| $G_{22}(z^{-1})$ | 2 | 0.680763 ±j0.204341 | 24.7131 | 5.04969 |
| Nullstellen von det $\underline{B}(z^{-1})$ (≙ Übertragungsnullstellen): 78.3987; 10.4280; -0.78025±j0.317145; 0.69880±j0.220462; 0.830167 | | | | |
| Schrittverzögerungen: $d_{11} = d_{12} = d_{21} = d_{22} = 1$ | | | | |

Tabelle 5.3. Charakteristische Daten der zu Tabelle 5.1 gehörenden diskreten Übertragungsmatrix für die Abtastzeit T=0.1 sec unter Berücksichtigung eines Halteglieds nullter Ordnung; AP1, $R_L$=2.8Ω

Bild 5.4 zeigt das Störverhalten der Regelstrecke ohne Regelung.

## 5.2.2. Entwurf des Reglers und experimentelle Ergebnisse

Wie bereits erwähnt, wird für die diskrete Regelung des Turbogenerators eine Abtastzeit von 0.1 sec gewählt. Um den Regler so einfach wie möglich auszulegen, wird das Parallelmodell bis auf die notwendige Schrittverzögerung von einem Abtastschritt als Einheitsmatrix mit

$$\underline{A}_M(z^{-1}) = \underline{I} \tag{5.5a}$$

$$\underline{B}_M(z^{-1}) = \underline{I} \tag{5.5b}$$

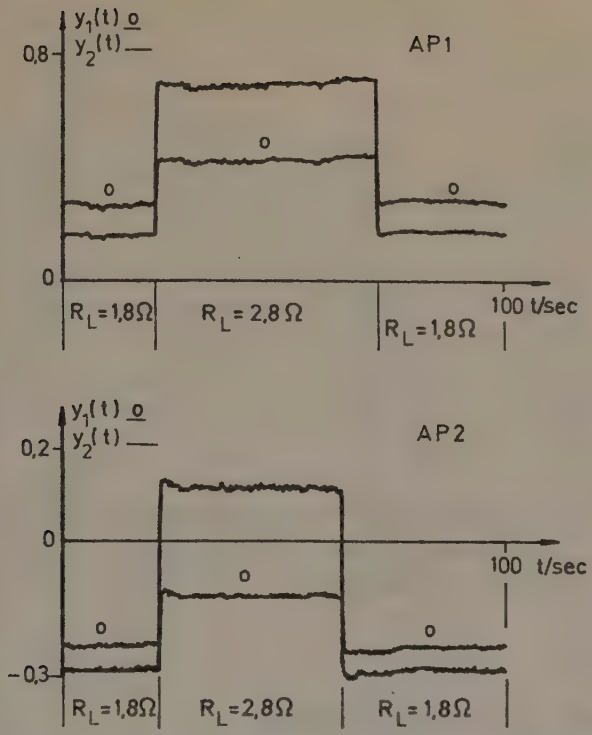



Bild 5.4. Gemessenes Störverhalten der Regelstrecke ohne Regelung in beiden Arbeitspunkten

angesetzt. Auch auf das Vorfilter wird verzichtet, d.h.

$$\underline{G}_V(z^{-1}) = \underline{I} \tag{5.6}$$

Da die Regelstrecke asymptotisch stabil ist, kann hier Schlußfolgerung 4.5 zum Entwurf des Korrekturnetzwerkes herangezogen werden. Um stationäre Genauigkeit zu erreichen, soll ein Regler mit einfachem expliziten I-Verhalten angewendet werden. Demnach muß das Korrekturnetzwerk eine einfache Nullstelle bei z=1 haben. Es werden Korrekturnetzwerke mit den Daten

$$\underline{A}_K(z^{-1}) = \begin{bmatrix} (1-0.5z^{-1})^2 & 0 \\ 0 & (1-0.3z^{-1})^2 \end{bmatrix} \tag{5.7a}$$

$$\underline{B}_K(z^{-1}) = \begin{bmatrix} K_{K1} & 0 \\ 0 & K_{K2} \end{bmatrix} (1-z^{-1}) \qquad (5.7b)$$

bzw.

$$\underline{A}_K(z^{-1}) = \underline{I} \qquad (5.8a)$$

$$\underline{B}_K(z^{-1}) = \begin{bmatrix} K_{K1} & 0 \\ 0 & K_{K2} \end{bmatrix} (1-z^{-1}) \qquad (5.8b)$$

eingesetzt. Da nach Bild 5.3 der Verstärkungsfaktor der Übertragungsfunktion $G_{11}(z^{-1})$ der Regelstrecke stets negatives Vorzeichen hat, muß entsprechend Gl.(4.98) gelten

$$\mathrm{sgn}(K_{K1}) = -1 \ . \qquad (5.9)$$

Für den Vorfaktor $K_{K2}$ muß die Bedingung

$$\mathrm{sgn}(K_{K2}) = \mathrm{sgn}\{\frac{G_{11}(1)\ G_{22}(1) - G_{12}(1)\ G_{21}(1)}{G_{11}(1)}\}$$
$$= +1 \qquad (5.10)$$

erfüllt sein. Diese Bedingung kann gemäß Gl.(4.98) aus Bild 5.3 und auch mit dem a priori Modell nach Tabelle 5.3 abgeschätzt werden. Die Vorfaktoren $K_{Ki}$ werden on-line direkt an der Anlage unter den Bedingungen von Gln.(5.9) und (5.10) eingestellt. Das zweite Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.8a,b) hat die besonders einfache Form nach Gln.(4.100 a bis d), während das erste Netzwerk nach Gln.(5.7a,b) mit dem a priori Modell der Regelstrecke nach Tabelle 5.3 unter Anwendung des sequentiellen Entwurfsalgorithmus' nach Abschnitt 3.5.2 entworfen wurde und zumindest für dieses a priori Modell einen größeren Stabilitätsbereich der ($K_{K1}$, $K_{K2}$)-Ebene ergibt. In allen Versuchen wird hier zur Adaption ein "fixed-gain" Verfahren mit diagonalen Bewertungsmatrizen $\underline{G}'_{\beta i}$ ($i \in \{1,2\}$) nach Gln.(A9.18a,b), die auf diagonale Bewertungsmatrizen $\underline{G}_i$ nach Gl.(4.50) zurückgeführt

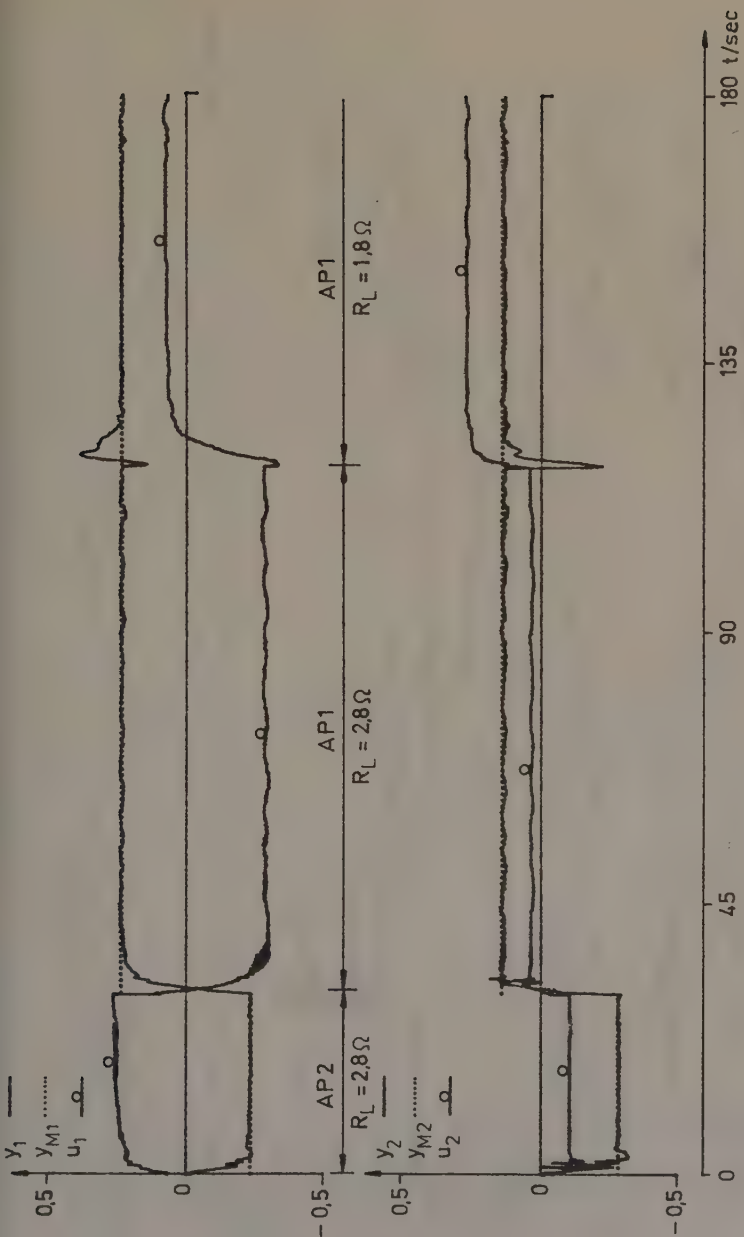



Bild 5.5. Adaptive Regelung des Turbogenerators; Voreinstellung des Reglers mit PRBS-Signalen, Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.7a,b); $K_{K1} = -3$, $K_{K2} = 10$.

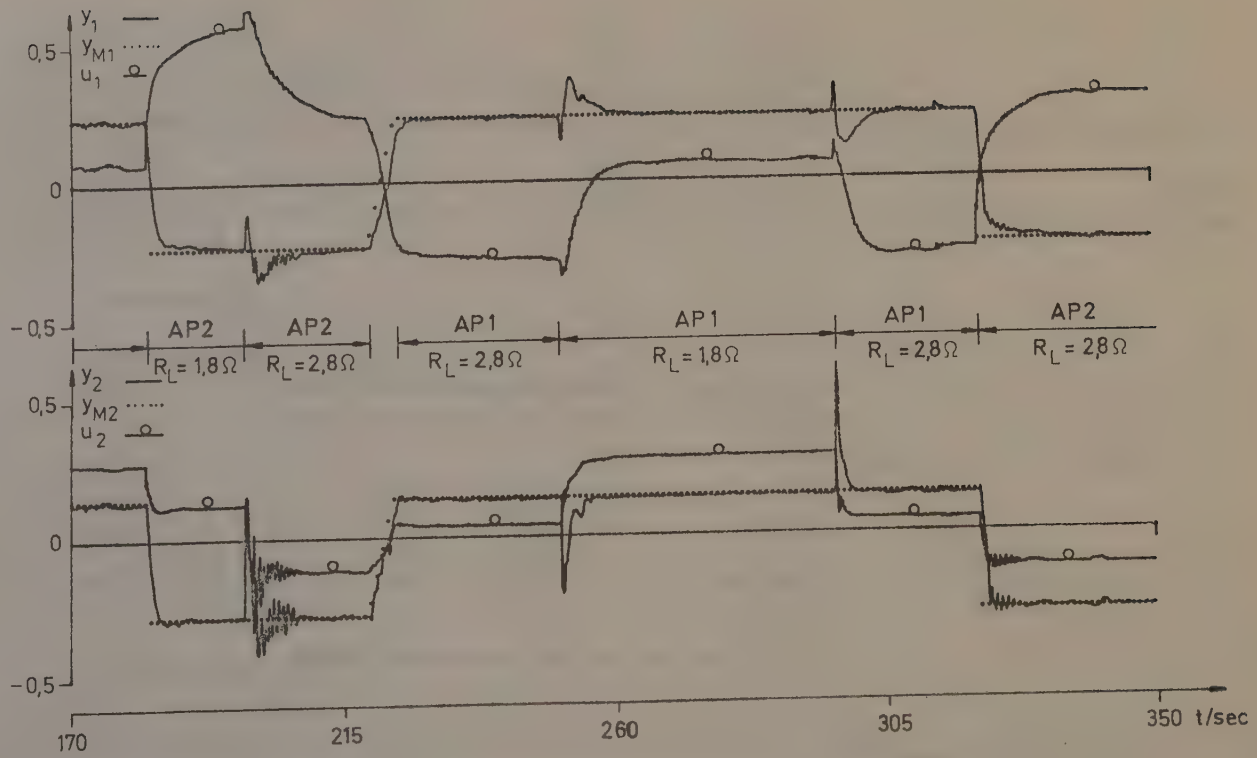



Bild 5.5. Fortsetzung

werden können, eingesetzt.

In dem in Bild 5.5 dargestellten Experiment wird vor Beginn des Versuchs unter der Arbeitsbedingung (80Hz, 6V) und einer Last von $R_L = 2.8\Omega$ der Regler mit PRBS-Signalen mit kleinen (dynamischen) Amplituden von 3.28 Hz und 0.19 V (dies entspricht normierten dynamischen Sollwertamplituden von 0.02) ca. 2.5 min lang voreingestellt. Dabei wird das Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.7a,b) verwendet. Wie Bild 5.5 zeigt, ist der Regler bereits unter allen Arbeitsbedingungen einsatzfähig. In Bild 5.6 sind der erste und der dritte Sollwertsprung gegenübergestellt. Dieses Bild zeigt, daß durch die Anpassungsfähigkeit des Reglers das Führungsverhalten weiter verbessert wird.

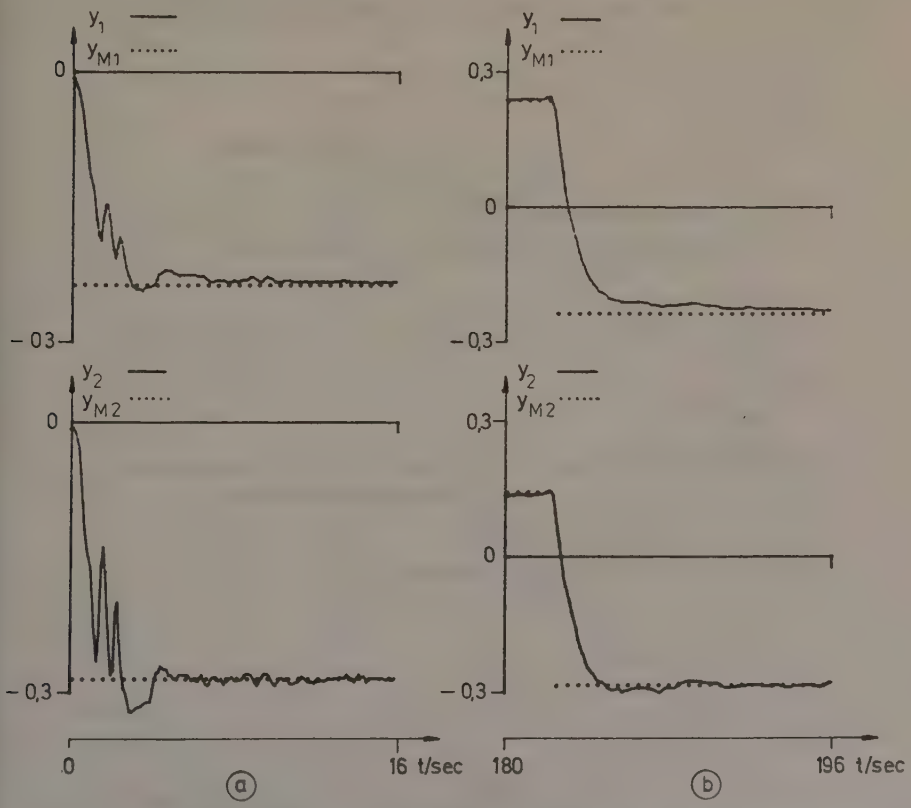



Bild 5.6. Führungsverhalten des adaptiven Reglers bei dem Versuch nach Bild 5.5 für den ersten (a) und dritten (b) Sollwertsprung

Die in Bild 5.5 bei ca. t=200 sec zu beobachtenden Oszillationen der Stell- und Regelgrößen können leider bei dem "fixed-gain" Verfahren erfahrungsgemäß nicht ausgeschlossen werden. Sie können reduziert werden, indem die Bewertungsmatrizen $\underline{G}_i$ nach Gl.(4.50) mit kleineren Eigenwerten gewählt werden, was aber auf der anderen Seite eine Verschlechterung der Konvergenz mit sich bringen kann. Es ist günstiger, durch Einsatz variabler Gewichtungsfaktoren nach Abschnitt 4.4.5 eine Kombination aus "fixed-gain" Verfahren und dem Verfahren der stochastischen Approximation anzuwenden, da mit dem Verfahren der stochastischen Approximation solche Oszillation wie sie in Bild 5.5 auftreten, gut unterdrückt werden können.

In Bild 5.7 ist die rampenförmige Änderung der Ausgangsgrößen $\underline{y}_M$

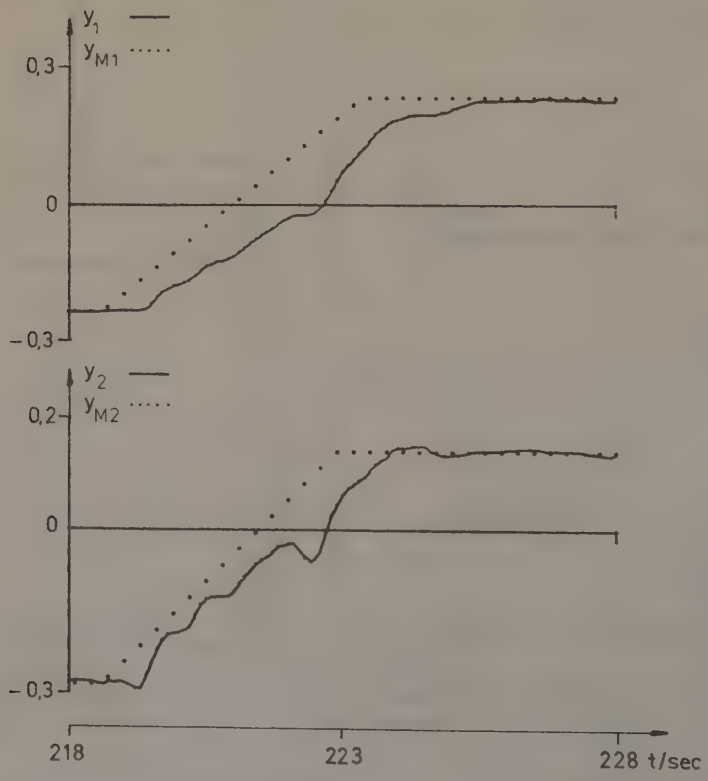



Bild 5.7. Führungsverhalten des adaptiven Reglers bei dem Versuch nach Bild 5.5 für rampenförmige Sollwertänderungen

des Parallelmodells aus Bild 5.5 bei ca. t≈220sec vergrößert dargestellt, die auf einer rampenförmigen Änderung der Sollwerte beruht. Deutlich ist in diesem Bild zu erkennen, daß der Regler mit einfachem I-Verhalten für rampenförmige Sollwertänderungen nicht stationär genau ist.

In Bild 5.8 wird das Störverhalten des adaptiven Reglers mit einfachem I-Verhalten dem Störverhalten des adaptiven Reglers ohne I-Anteil unter sonst gleichen Bedingungen gegenübergestellt. Auch bei dem Regler ohne Integrator wird das Korrekturnetzwerk nach Gln. (5.7a,b) verwendet, das aufgrund der einfachen Wurzel bei z=1 der beiden von Null verschiedenen Elemente der Zählerpolynommatrix $\underline{B}_K$

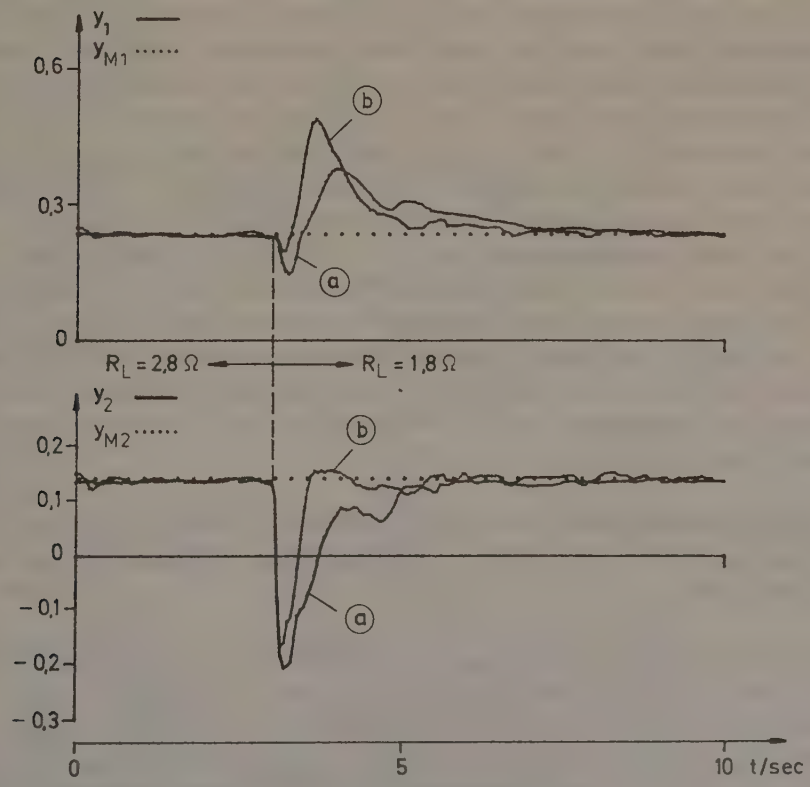
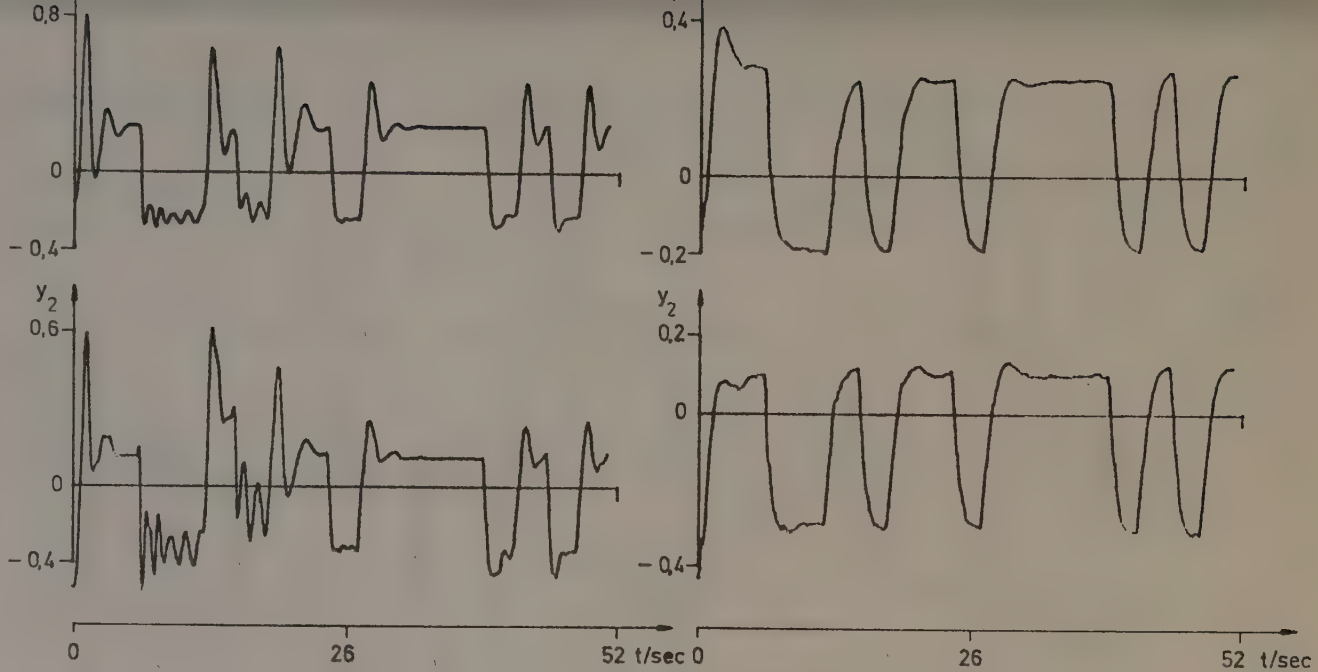



Bild 5.8. Störverhalten des adaptiven Reglers mit (a) und ohne (b) explizites I-Verhalten; AP1; Korrekturnetzwerk nach Gln. (5.7a,b), $K_{K1}$=-3, $K_{K2}$=10.

im störungsfreien Fall eine stationär genaue Regelung bei sprungförmigen Sollwertänderungen gestattet. Dies folgt aus Gl.(3.31), wenn dort zur Betrachtung reinen Führungsverhaltens die Störvektoren $\underline{\varepsilon}$ und $\underline{z}$ identisch Null gesetzt werden, und die Zerlegung der Matrix $\underline{B}_K(z^{-1})$ nach Gl.(3.32a) berücksichtigt wird. Sprungförmige Störungen können von dem *linearen* Regler ohne explizites I-Verhalten entsprechend Gl.(3.31) allerdings nicht ausgeregelt werden, da für ihn die Zerlegung der Polynommatrix $\underline{I} - \underline{R}(z^{-1})z^{-1}$ nach Gl.(3.32b) für $n_z \geq 0$ nicht existiert, d.h. die Elemente dieser Polynommatrix haben keine Nullstelle bei z=1. Dennoch zeigt Bild 5.8, daß bei dem *adaptiven* Regler ohne I-Anteil bei einer Laständerung, die einer sprungförmigen Störung entspricht, ebenfalls keine bleibende Regelabweichung auftritt (obwohl bei dem zugehörigen linearen Regler, d.h. bei abgeschalteter Adaption, eine solche bleibende Regelabweichung auftreten müßte). Die Ausregelung der Störung erfolgt in diesem Fall sogar wesentlich schneller als bei dem adaptiven Regler mit einfachem expliziten I-Verhalten. Bei dem adaptiven Regler ohne I-Anteil kann die Ausregelung der Störung nur durch die integrierende Wirkung des Einstellgesetzes der Reglerparameter nach Gl.(4.48) bzw. in diesem Anwendungsfall nach Gl.(A9.16a), d.h. durch eine gezielte Verstellung ("Detuning") der Reglerparameter erfolgen. Dies ist auch schon in Simulatoren beobachtet worden (Hahn (1978)). Obwohl der Regler ohne explizites I-Verhalten in diesem konkreten Experiment eine schnellere Ausregelung der Störung erlaubt, sollte er mit Vorsicht eingesetzt werden, da seine Stabilität im gestörten System nicht gewährleistet ist.

Das dynamische Verhalten der Regel- und Stellgrößen kann durch die Wahl der Vorfaktoren $K_{K1}$ und $K_{K2}$ des Korrekturnetzwerkes leicht beeinflußt werden.

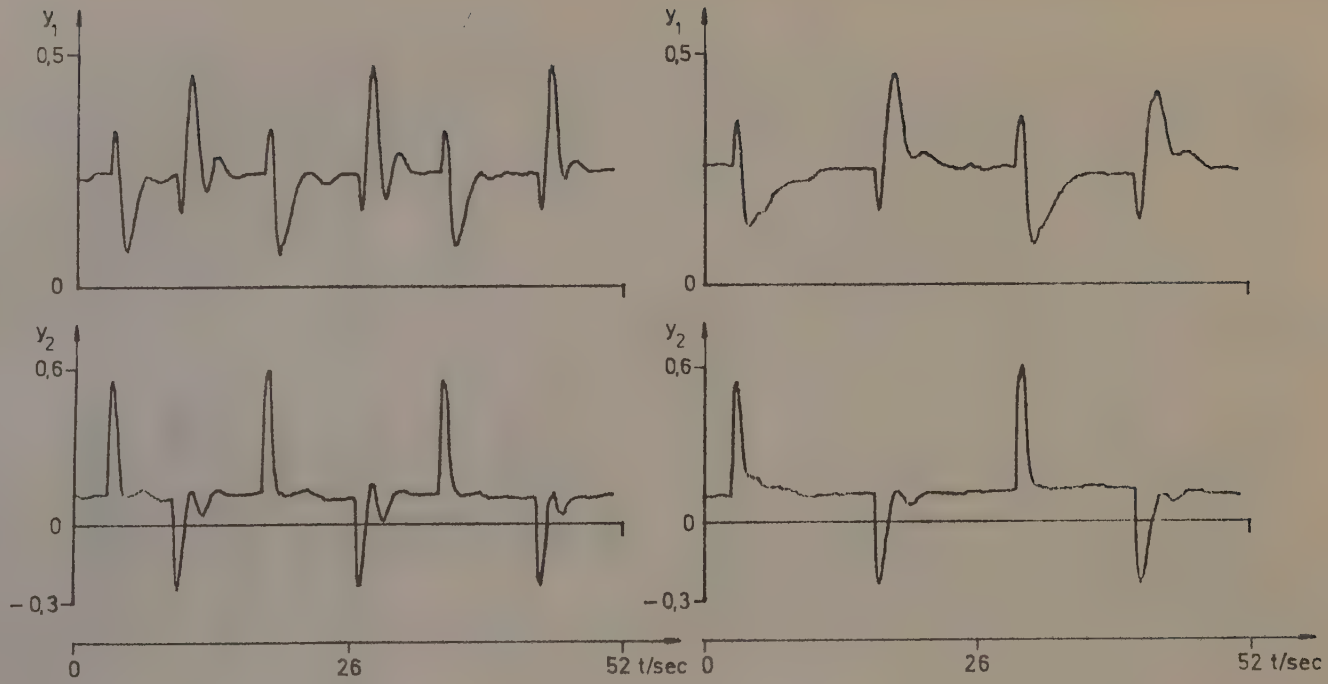
In Versuchen mit dem einfachen Korrekturnetzwerk nach Gl.(5.8a,b), die in Bild 5.9 dargestellt sind, zeigt sich, daß sich für große Beträge dieser Faktoren ein stark gedämpftes und langsames Übergangsverhalten der Regelgrößen ergibt, während sich für kleine Beträge ein schnelles dynamisches Verhalten mit starkem Überschwingen




a) Führungsverhalten; $R_L = 1.8\ \Omega$,
$K_{K1} = -3$, $K_{K2} = 8$

b) Führungsverhalten; $R_L = 1.8\ \Omega$,
$K_{K1} = -10$, $K_{K2} = 20$

Bild 5.9. Einfluß der Vorfaktoren $K_{K1}$ und $K_{K2}$ des Korrekturnetzwerks nach Gln.(5.8a,b) für den mit dem a priori-Modell nach Tabelle 5.3 voreingestellten Regler mit explizitem I-Verhalten




c) Störverhalten; AP1;
$K_{K1} = -5$, $K_{K2} = 15$

d) Störverhalten; AP1;
$K_{K1} = -10$, $K_{K2} = 20$

Bild 5.9. Fortsetzung

einstellt. In Bild 5.10 und Bild 5.11 werden noch einmal Führungs- und Störverhalten für verschiedene Vorfaktoren $K_{K1}$ und $K_{K2}$ des

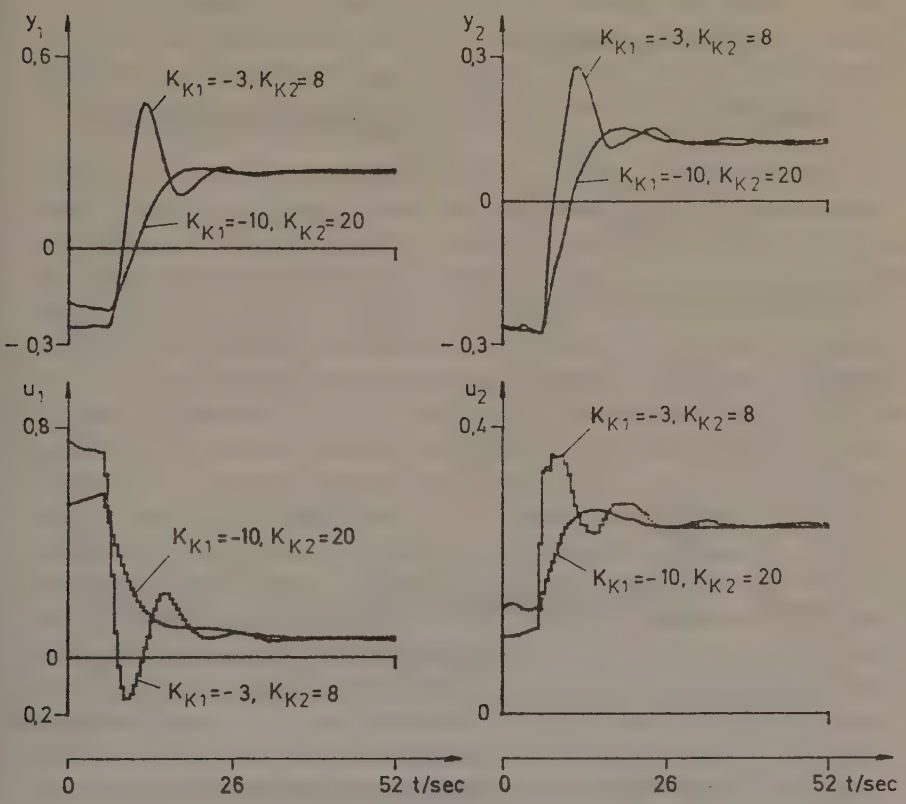



Bild 5.10. Führungsverhalten des adaptiven Reglers mit explizitem I-Verhalten; Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.8a,b); $R_L = 1.8\Omega$

Korrekturnetzwerks verglichen. Die Ausgangsgrößen $y_K$ des Korrekturnetzwerkes nach Gln.(5.8a,b) sind aufgrund des Ausdrucks $(1-z^{-1})$ im Zähler nichts anderes als die mit den Faktoren $K_{K1}$ bzw. $K_{K2}$ "gewichteten" Inkremente der Stellgrößen (vgl. hierzu Gl.(3.2)). Die Ausgangsgrößen $y_E$ der erweiterten Regelstrecke, die ja entsprechend

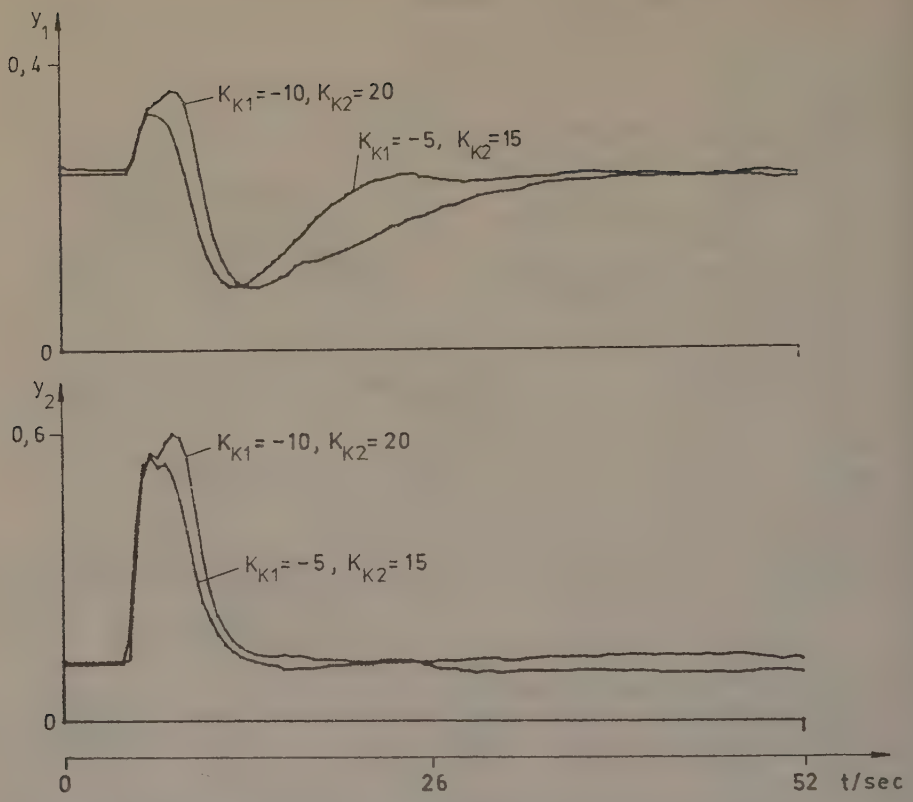



Bild 5.11. Störverhalten des adaptiven Reglers mit explizitem I-Verhalten; Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.8a,b); AP1.

der Struktur nach Bild 3.1 im angepaßten Zustand den Ausgangsgrößen $\underline{y}_M$ des Parallelmodells folgen, sind somit gemäß Gl.(3.4) eine Linearkombination der Regelgrößen $\underline{y}$ und der gewichteten Stellinkremente. Eine starke Gewichtung der Stellinkremente bedeutet, daß nur eine relativ langsame Änderung der Stellgrößen erfolgt, was ein langsames Verhalten der Regelgrößen nach sich zieht. Gewichtet man die Stellinkremente nur schwach, indem die Faktoren $K_{K1}$ und $K_{K2}$ betragsmäßig klein gewählt werden, so werden schnelle Stellgrößenänderungen zugelassen, die zu einem schnellen Übergangsver-

halten der Regelgrößen mit eventuell großem Überschwingen (schlechte Dämpfung) führen. Dies wird deutlich durch die Signalverläufe in Bild 5.10 und Bild 5.11 bestätigt. Mit den Vorfaktoren $K_{K1}$ und $K_{K2}$ kann also einfach die Dämpfung des Regelkreises in einer gewünschten Weise beeinflußt werden, obwohl der mathematisch exakte Zusammenhang zwischen der Dämpfung und den Vorfaktoren des Korrekturnetzwerkes bei unbekannter Regelstrecke nicht bestimmt werden kann.

Bewußt ist in den vorangegangenen Ausführungen auf eine anschauliche Interpretation des Einflusses der Vorfaktoren des Korrekturnetzwerkes zurückgegriffen worden, weil sie auf eine "Faustregel" führt, die sich bei stabilen Regelstrecken (auch z.B. bei der im nächsten Abschnitt diskutierten Destillationskolonne) bewährt hat. Ist die Regelstrecke stabil, so werden die Vorfaktoren $K_{Ki}$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$) für ein stabiles Korrekturnetzwerk, dessen Einzelübertragungsfunktionen entsprechend Schlußfolgerung 4.5 höchstens eine Wurzel bei $z=1$ und alle anderen Wurzeln innerhalb des Einheitskreises haben (das aber ansonsten beliebig sein kann), zunächst sehr groß gewählt. Dies führt zwangsläufig auf kleine Stellgrößen bzw. kleine inkrementelle Änderungen der Stellgrößen und damit auf ein sehr langsames dynamisches Verhalten der Regelgrößen. Dann werden im on-line Betrieb die Vorfaktoren des Korrekturnetzwerkes solange verkleinert, bis sich ein akzeptabler Kompromiß zwischen dem Einschwingverhalten der Regelgrößen und dem Stellverhalten einstellt. Liegt nur wenig a priori Kenntnis bezüglich des dynamischen Verhaltens einer stabilen Regelstrecke vor, so hat es keinen Sinn, ein kompliziertes Korrekturnetzwerk a priori zu entwerfen. Dann startet man am besten stets mit dem einfachen Netzwerk nach Gln. (4.100 a bis f), das für $n_z=0$ eine Gewichtung der Stellgrößen selbst bzw. für $n_z=1$ der Stellinkremente bewirkt. Ist mit diesem einfachen Korrekturnetzwerk keine zufriedenstellende Regelung möglich, so können die sich einstellenden Reglerparameter dazu benutzt werden, die a priori Kenntnisse bezüglich der Regelstrecke zu verbessern und mit diesen Kenntnissen einen verbesserten Entwurf des Korrekturnetzwerkes mit den in Kapitel 3 beschriebenen Methoden durchzuführen. Obwohl die bisherigen Ausführungen sich nur auf stabile Regelstrecken beziehen, sind sie auch auf instabile Regelstrecken

übertragbar, vorausgesetzt die Stabilitätsbedingung nach Gl.(3.7) ist erfüllt. Wie in Abschnitt 4.4 erläutert ist, erfordert die Überprüfung dieser Voraussetzung jedoch bei instabilen Regelstrecken mehr a priori Kenntnisse als bei stabilen Regelstrecken.

In Bild 5.12 ist ein typischer adaptiver Transientvorgang unter Verwendung von PRBS-Signalen kleiner Amplitude dokumentiert. Zu Beginn dieses Versuchs sind alle adaptiv einzustellenden Parameter des Reglers auf Null gesetzt worden.

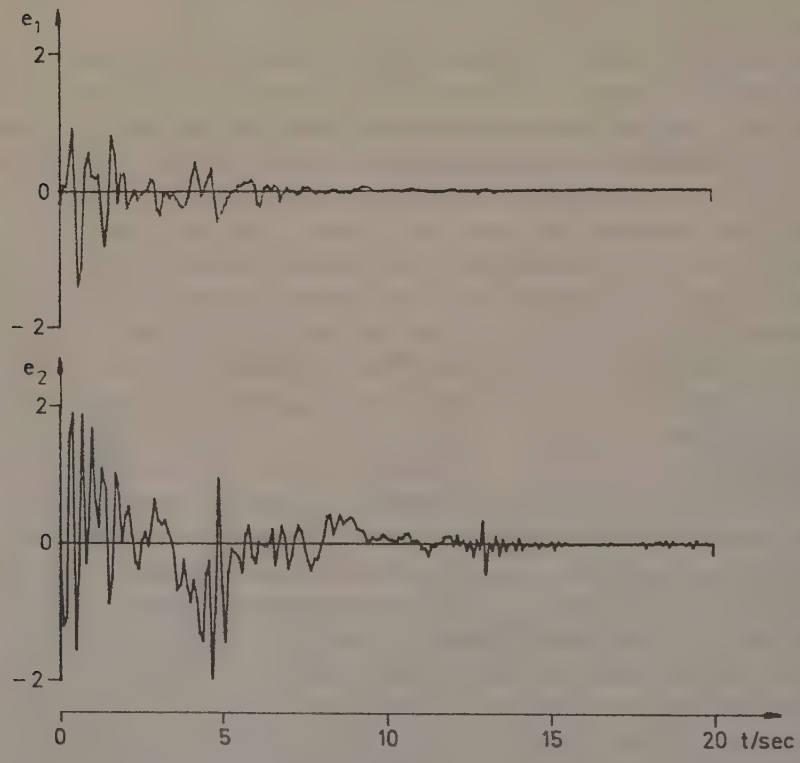



Bild 5.12. Einschwingverhalten des adaptiven Reglers mit explizitem I-Verhalten. Verlauf der normierten natürlichen Fehler $e_1$ $e_2$ bei fehlender Voreinstellung des Reglers (Anfangswerte der Reglerparameter = 0) und Erregung durch PRBS-förmige dynamische Sollwerte mit den normierten Amplituden $w_1$=0.002≙3.28Hz und $w_2$=0.02≙0.19V im Arbeitspunkt 80Hz, 60V, $R_L$=2.8Ω; Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.8a,b) mit $K_{K1}$ = -5, $K_{K2}$ = 10.

Es bleibt die Frage, ob der Turbogenerator trotz seines nichtlinearen Verhaltens nicht auch mit einem linearen Regler geregelt werden kann. Im Anschluß an den in Bild 5.5 dokumentierten Versuch wurden die Beträge der Vorfaktoren des Korrekturnetzwerkes on-line noch etwas reduziert, um ein schnelleres dynamisches Verhalten der Regelgrößen zu ermöglichen. Dann wurde die Adaption ausgeschaltet, so daß sich ein linearer Regler ergibt. Das Ergebnis ist in Bild 5.13 und Bild 5.14 dargestellt. Aufgrund der Adaption hat sich ein linearer Regler eingestellt, der "robust" ist in dem Sinne, daß eine stabile und zufriedenstellende Regelung des Turbogenerators unter allen Arbeitsbedingungen ermöglicht wird. Ein solcher linearer Regler kann auch direkt a priori entworfen werden, wenn genügend Information über das dynamische Verhalten der Regelstrecke zur Verfügung gestellt wird. Der Vorteil des adaptiven Reglers besteht darin, daß sein Einsatz nur wenig a priori Kenntnisse über das dynamische Verhalten der Regelstrecke erfordert und durch die Selbsteinstellung der Reglerparameter der Entwurfsaufwand gesenkt wird.

Diese Ausage wird durch das in Bild 5.15 dargestellte Experiment noch in etwas anderer Hinsicht unterstützt. Der Regler wird mit Hilfe des a priori Modells der Regelstrecke aus Tabelle 5.3 als festeingestellter linearer Regler entworfen,wobei dasselbe Korrekturnetzwerk wie in Bild 5.13 eingesetzt wird. Im Arbeitspunkt AP1 (100 Hz, 6.5V) bei einer Last von $R_L$=2.8Ω pro Phase ist der lineare Regler funktionsfähig. Dies sind genau die Arbeitsbedingungen, für die das mathematische Modell der Regelstrecke nach Tabelle 5.3 gilt. Aber bereits die Änderung der Last hat zur Folge, daß die Regelung instabil wird. Durch das Einschalten der Adaption wird dann das Regelungssystem wieder sehr schnell stabilisiert. Durch die Adaption wird hier also eine größere Stabilitätssicherheit erzielt.

Da die Nullstellen von det $\underline{B}(z^{-1})$ für das a priori Modell weit außerhalb des Einheitskreises liegen, könnte man vermuten, daß es sich nur um numerisch bedingte Nullstellen des mathematischen Modells ohne physikalische Bedeutung handelt. Es ist daher auch versuchsweise ein Regler ohne Korrekturnetzwerk eingesetzt worden (Fresewinkel (1981)). Hierbei traten jedoch stets Stabilitätsprobleme auf.

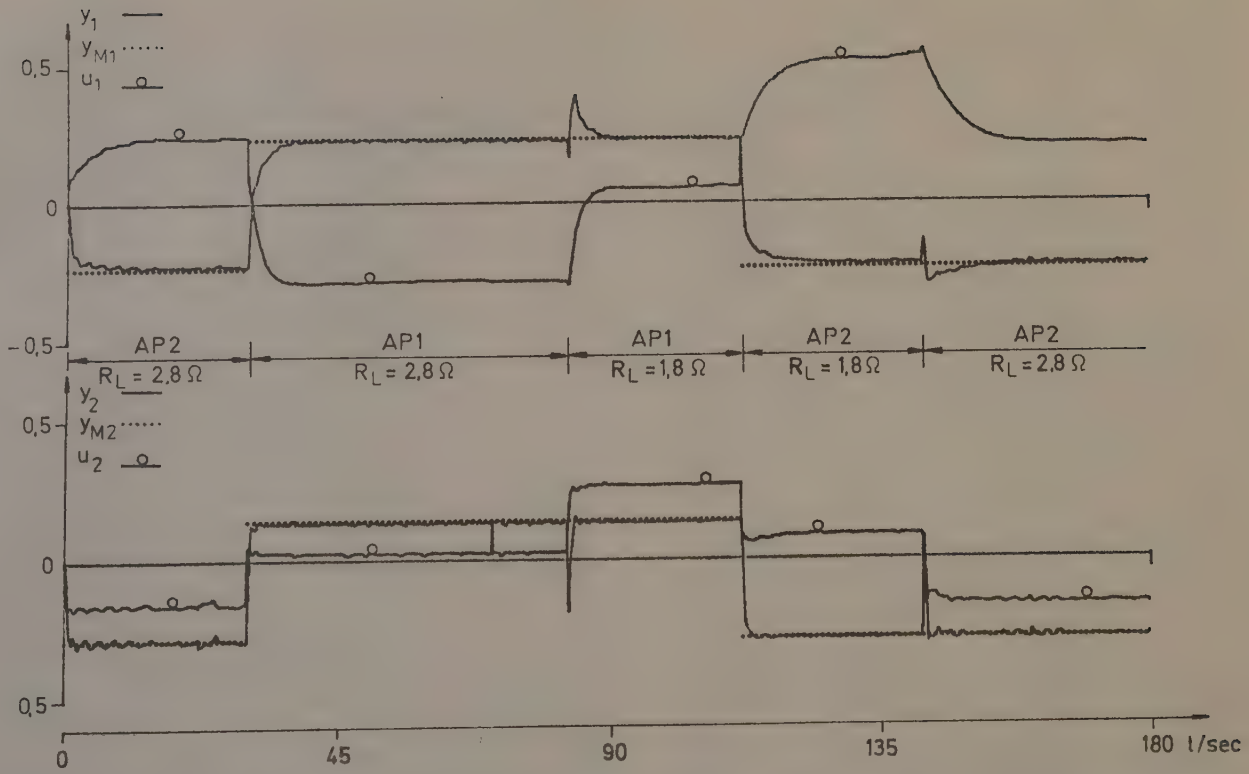



Bild 5.13. Lineare Regelung des Turbogenerators mit dem (adaptiv) eingestellten Regler mit explizitem I-Verhalten aus dem Versuch nach Bild 5.5; Korrekturnetzwerk nach Gln. (5.7a,b), $K_{K1} = -2.5$; $K_{K2} = 3$.

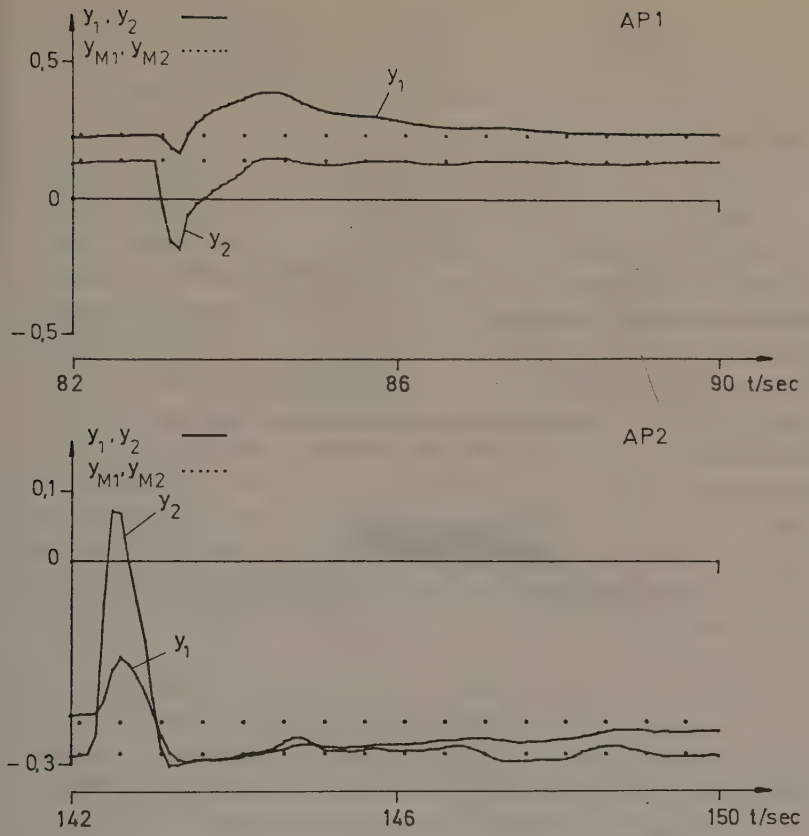



Bild 5.14. Störverhalten des festeingestellten linearen Reglers mit explizitem I-Verhalten aus dem Versuch nach Bild 5.13 in beiden Arbeitspunkten.

Bei den in diesem Abschnitt beschriebenen Versuchen ist der Regelalgorithmus auf einem Prozeßrechner HP2100 implementiert worden. Die Gesamtrechenzeit für die adaptive Regelung des Turbogenerators beträgt pro Abtastschritt ca. 40ms bis 45ms . Dabei sind für den Regler mit einfachem I-Verhalten 29 Parameter, für den Regler ohne I-Verhalten 27 Parameter on-line einzustellen. Diese Anzahl ergibt sich direkt aus Gl.(4.48) mit $n_{R1} = n_{R2} = 0$, $n_z \in \{-1,0\}$ und den Strukturdaten der Regelstrecke nach Gln.(5.4a bis f). Da der Algorithmus

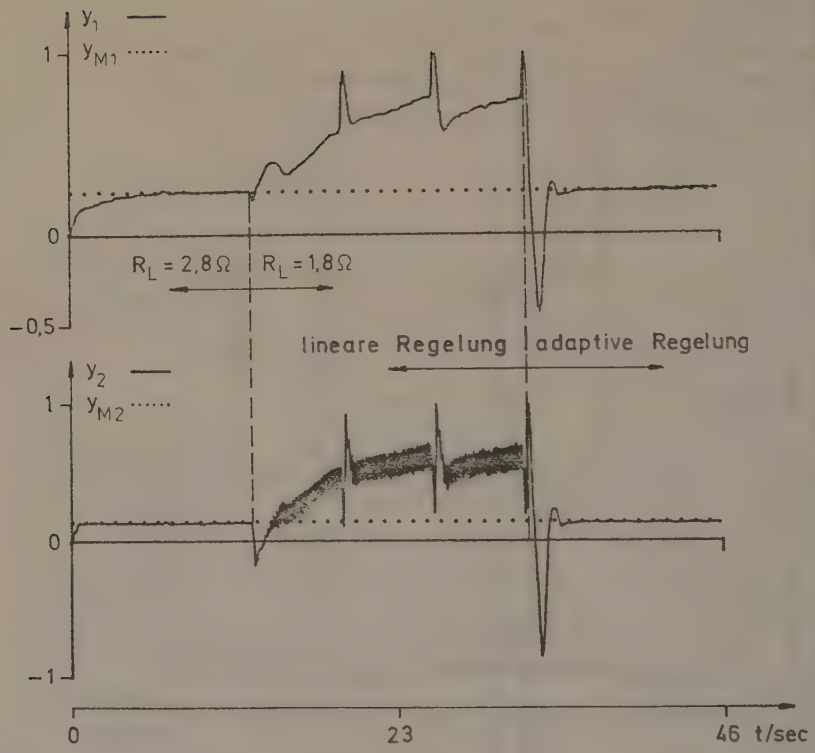



Bild 5.15. Instabilität des geschlossenen Regelkreises für den mit dem mathematischen Modell nach Tabelle 5.3 linear entworfenen Regler mit explizitem I-Verhalten; AP1; Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.7a,b) mit $K_{K1} = -2,5$; $K_{K2} = 3$.

wie in Abschnitt 4.6 dargestellt organisiert ist, ist die Zeit zwischen Messung der aktuellen Regelgrößen und Ausgabe der aktuellen Stellgrößen sehr kurz und liegt zwischen 1ms und 2ms. Verwendet man für die Schätzung der Reglerparameter ein Least-squares Verfahren, so steigt die Gesamtrechenzeit erheblich an (Hahn et al. (1982 )). Für den Turbogenerator beträgt sie dann ca. 280ms.

## 5.3. Adaptive Regelung einer Destillationskolonne

### 5.3.1. Beschreibung der Regelstrecke und Anforderungen an die Regelung

Eine schematische Darstellung der Destillationskolonne ist in Bild 5.16 dargestellt. Das einlaufende Produkt ist ein binäres Stoffgemisch. Dieses Gemisch wird im Sumpf der Kolonne erhitzt und verdampft. Während der Dampf aufsteigt, nimmt die Konzentration der leichter siedenden Komponente im Dampf zu. Umgekehrt reichert sich im Sumpf der Kolonne die schwerer siedende Komponente an. Im Kopf der Kolonne wird der Dampf kondensiert. Ein Teil dieses Kondensats wird als Rücklauf wieder in die Kolonnne zurückgeführt. Das Rücklaufverhältnis $\rho$, definiert als Mengenverhältnis des rückfließenden zu dem abgeführten Kondensat, kann über ein Ventil eingestellt werden und bietet neben einer Änderung der Heizleistung h der Sumpfheizung eine einfache Möglichkeit, das dynamische Verhalten der Kolonne zu beeinflussen. Diese beiden Größen werden daher als Stellgrößen ausgewählt.

Ziel der Regelung ist es, die Konzentrationen des Sumpf- und Kopfproduktes für einen vorgegebenen Arbeitspunkt konstant zu halten (Festwertregelung). Führungsgrößenänderungen sind von geringem Interesse. Eine direkte Konzentrationsmessung ist allerdings verzögerungsfrei nicht durchführbar. Aus der Verfahrenstechnik ist aber bekannt, daß unter isobarischen Bedingungen die Temperaturen des Kopf- und Sumpfproduktes ein Maß für die jeweiligen Konzentrationen darstellen. Bei der Pilotanlage wird der Druck in der Kolonne über einen internen Druckregler konstant gehalten, so daß hier direkt die Temperaturen $T_t$ des Kopf- und $T_b$ des Sumpfproduktes als Regelgrößen verwendet werden.

Bei der Versuchsanlage ist es möglich, gezielte Störungen am Einlauf der Kolonne zu erzeugen. Die beiden Vorratsbehälter $c_1$ und $c_2$ enthalten verschiedene Konzentrationen des binären Stoffgemisches. Durch Umschalten der Behälter mittels geeigneter Ventile kann im vorliegenden Fall eine Konzentrationsstörung von ca. 20% bezogen auf einen mittleren Konzentrationswert aufgebracht werden. Ferner kann die Zulaufmenge variiert werden, indem die Drehzahl der

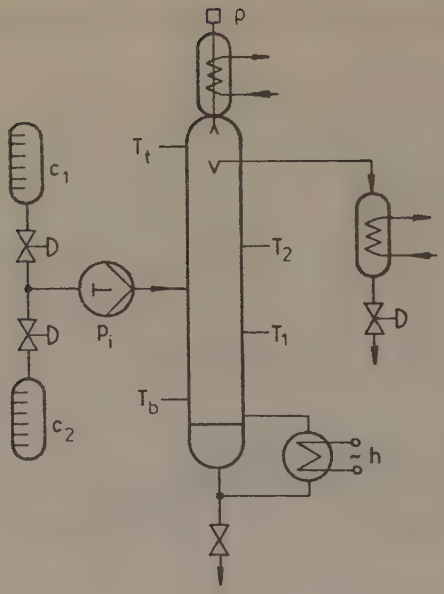



Bild 5.16. Schematische Darstellung der Destillationskolonne

$c_1$, $c_2$: Behälter mit verschiedenen Konzentrationen des einlaufenden binären Stoffgemisches

$p_i$: Einlaufpumpe

h : Sumpfheizung

ρ: Stellventil zur Einstellung des Rücklaufverhältnisses

$T_t$: Kopftemperatur

$T_b$: Sumpftemperatur

$T_1$, $T_2$: Zwischentemperatur unterhalb und oberhalb des Zuflusses

Einlaufpumpe verändert wird. Dabei können Zulaufmengenstörungen von 22% ebenfalls bezogen auf einen mittleren Wert realisiert werden. Für die Experimente werden diese Störungen als nicht meßbar vorausgesetzt, obwohl bei manchen praktischen Anwendungen eine Zulaufmengenstörung meßbar ist. Ist dies der Fall, so kann nach der in Abschnitt 4.5.1 beschriebenen Methode eine Störgrößenaufschaltung erfolgen.

Das dynamische Verhalten der Regelgrößen kann grob durch Anstiegszeiten zwischen 45 und 70 min charakterisiert werden. Um schnelle Störungen, die sich über die gasförmige Phase ausbreiten, frühzeitig erfassen zu können, ist eine Abtastzeit von T=30 sec gewählt worden.

Für das dynamische Verhalten wird eine diskrete 2x2 Übertragungsmatrix angesetzt, deren Teilübertragungsfunktionen nur Schrittverzögerungen von einem Abtastschritt aufweisen. D.h. für das kontinuierliche System wird angenommen, daß keine Totzeiten vorhanden sind. Bild 5.17 zeigt das prinzipielle Blockschaltbild der Regelstrecke, wobei durch das Symbol Δ die dynamischen Abweichungen der Signalgrößen von den statisch voreingestellten Werten, also im allgemeinen den Arbeitspunkten, bezeichnet werden. Die Zahlen in den spitzen Klammern geben die Ordnungen der Teilübertragungsfunktionen an.

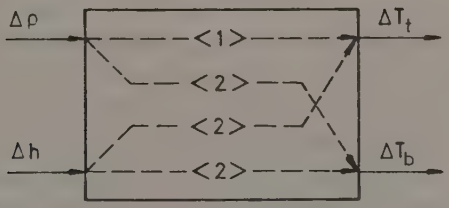



Bild 5.17. Blockschaltbild der Regelstrecke mit den Ordnungen der Teilübertragungsfunktionen

5.3.2. Experimentelle Ergebnisse

Auch bei dieser Anlage wird der Regler mit dem einfachen Parallelmodell nach Gln.(5.5a,b) und dem Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.8a,b) ausgelegt. Allerdings wird für den Regler ohne explizites I-Verhalten zusätzlich das Korrekturnetzwerk

$$\underline{B}_K(z^{-1}) = \underline{K}_K = \begin{bmatrix} K_{K1} & 0 \\ 0 & K_{K2} \end{bmatrix} \tag{5.11a}$$

$$\underline{A}_K(z^{-1}) = \underline{I} \tag{5.11b}$$

ausprobiert, das im Unterschied zu dem aus Gln.(5.8a,b) keine Nullstelle bei z=1 hat. Die Vorfaktoren $K_{K1}$ und $K_{K2}$ des Korrekturnetzwerkes werden im on-line Betrieb direkt am Prozeß eingestellt. Für die Adaption wird ein "fixed gain" Verfahren mit diagonalen Bewertungsmatrizen $\underline{G}'_{\beta i}$ nach Gln.(A9.18a,b) eingesetzt.

Die experimetellen Ergebnisse sind in den Bildern 5.18 bis 5.23 dargestellt, wobei die y-Achse in den dynamischen Werten, die sich relativ auf einen bestimmten Arbeitspunkt beziehen, skaliert ist. Aufgrund des verwendeten Schreibers sind die einzelnen y-Achsen leicht zeitversetzt. Ferner werden "positive" dynamische Signalwerte in "negativer" Richtung aufgetragen und umgekehrt.

In Bild 5.18 und Bild 5.19 wird das Störverhalten der Regelung bei Zulaufmengenstörungen untersucht, wobei ein Regler mit explizitem I-Verhalten (mit dem Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.8a,b)) und ein Regler ohne I-Verhalten mit dem Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.11a,b) eingesetzt werden. Zu Beginn dieser Versuche ist der Regler mit einem vorhandenen a priori Modell der Regelstrecke voreingestellt worden. In beiden Fällen wird der Einfluß der Störung im wesentlichen durch Erhöhung der Heizleistung kompensiert. Auch hier tritt bei dem adaptiven Regler ohne I-Verhalten - wie bei dem Turbogenerator - keine bleibende Regelabweichung auf. Dies kann nur eine Folge der integralen Wirkung des nichtlinearen Adap-

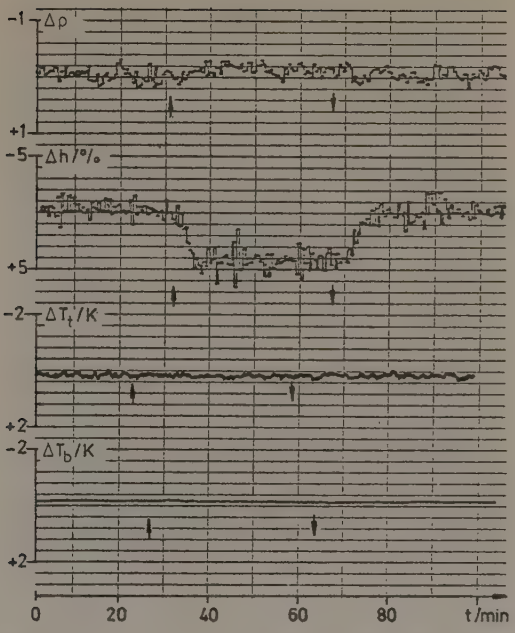



Bild 5.18. Dynamisches Verhalten der Stell- und Regelgrößen bei voreingestelltem Regler ohne explizites I-Verhalten und dem Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.11a,b); Zulaufmengenstörungen (↑/↓)

tionsalgorithmus' sein, da bei dem Regler ohne I-Verhalten bei abgeschalteter Adaption bleibende Regelabweichungen an der realen Anlage gemessen werden können (Wiemer (1982)). Allerdings sind diese stationären Abweichungen klein, wenn der Regler mit dem a priori-Modell der Regelstrecke voreingestellt wird. Durch Vergleich von Bild 5.18 mit Bild 5.19 erkennt man, daß bei dem Regler ohne Integrator mit dem Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.11a,b) die Varianz der Stellgrößen geringer ist als bei dem Regler mit explizitem I-Verhalten, der das Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.8a,b) er-

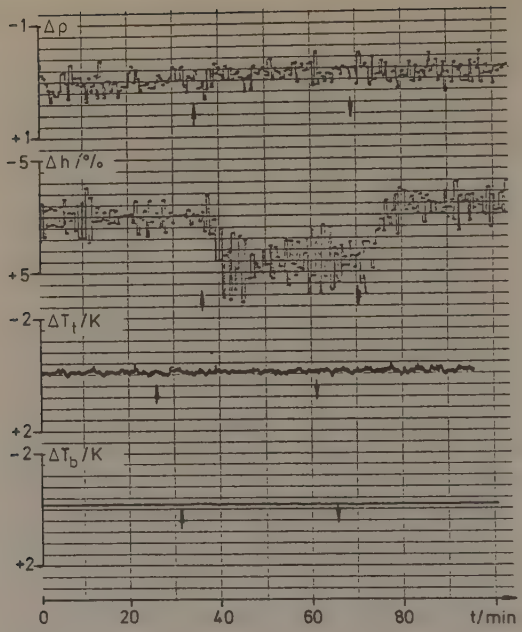



Bild 5.19. Dynamisches Verhalten der Stell- und Regelgrößen bei voreingestelltem Regler mit einfachem expliziten I-Verhalten und dem Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.8a,b); Zulaufmengenstörungen (↑/↓)

fordert. Dies liegt wohl daran, daß bei dem Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.11a,b) direkt die Stellgrößen, bei dem Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.8a,b) jedoch nur deren Inkremente gewichtet werden.

Bild 5.20 zeigt das dynamische Verhalten der Regelgrößen, wenn Zulaufmengen- und Konzentrationsstörungen gleichzeitig auftreten und der Regler mit dem a priori Modell der Regelstrecke voreingestellt wird. Der Einfluß der Störung wird praktisch vollständig kompensiert. Hält man Kopf- und Sumpftemperatur konstant, so muß sich bei einer Störung am Einlauf der Kolonne das Temperaturprofil innerhalb der Kolonne verschieben. In Bild 5.20 sind daher auch noch zwei Temperaturen $T_1$ und $T_2$, die oberhalb und unterhalb des Einlaufs gemessen werden, dokumentiert.

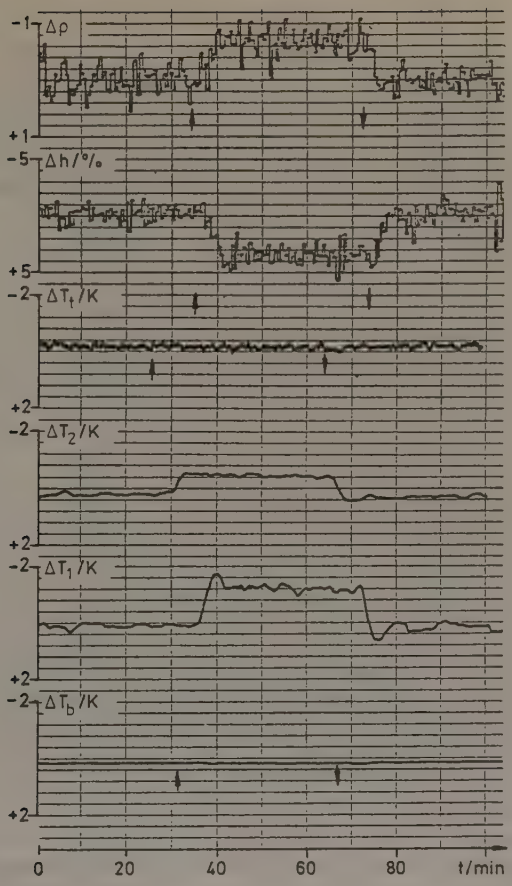



Bild 5.20. Dynamisches Verhalten der Stell- und Regelgrößen bei voreingestelltem Regler ohne I-Verhalten und dem Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.11a,b); Zulaufmengen- und Konzentrationsstörungen (↑/↓)

Bild 5.21 bis Bild 5.23 zeigen das Adaptionsverhalten der Regelung bei nicht voreingestelltem Regler, d.h. alle adaptiv einzustellenden Reglerparameter werden zu Beginn auf Null gesetzt. Bei dem in Bild 5.21 dargestellten Versuch wird das System nur durch die Störungen

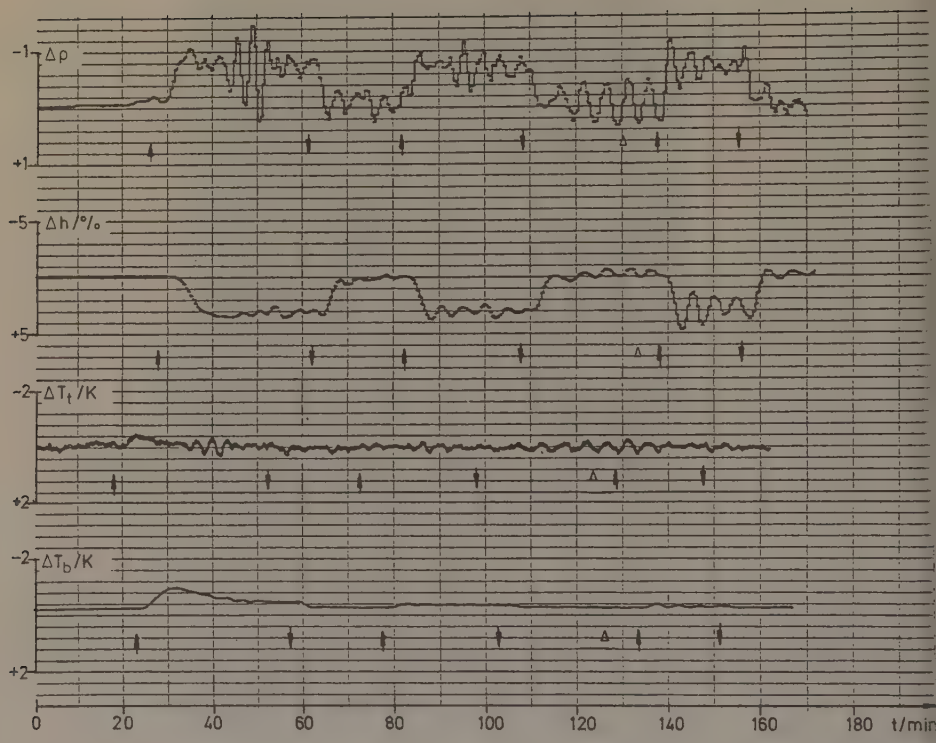



Bild 5.21. Anpassungsversuche bei nicht voreingestelltem Regler (Anfangswerte der Reglerparameter = 0); Regler ohne explizites I-Verhalten; Korrekturnetzwerk nach Gln. (5.8a,b); Zulaufmengen- und Konzentrationsstörungen (↑|↓)

angeregt. Es ist bereits von Anbeginn eine zufriedenstellende Regelung möglich. Allerdings treten bis ca. t=125 min für die Sumpftemperatur kleine bleibende Regelabweichungen auf, während die Kopftemperatur zu Oszillationen neigt. Zum Zeitpunkt Δ werden daher die Bewertungsmatrizen $\underline{G}'_{\beta 1}$ und $\underline{G}'_{\beta 2}$ nach Gln.(A9.18a,b), die in dem adaptiven Einstellgesetz nach Gl.(A9.16a) auftreten, verändert. (Diese Matrizen werden - wie bereits erwähnt - als Diagonalmatrizen angesetzt.) Für die erste Regelschleife der Kopftemperatur werden die adaptiven Bewertungen, also die (von Null verschiedenen) Elemente der Diagonalmatrix $\underline{G}'_{\beta 1}$ verkleinert, für die zweite Regelschleife der Sumpftemperatur werden die adaptiven Bewertungen, d.h. die Elemente der Diagonalmatrix $\underline{G}'_{\beta 2}$ erhöht. Dadurch verschwinden sowohl die Oszillationen der Kopftemperatur als auch die bleibende Regelabweichung der Sumpftemperatur.

Bild 5.22 zeigt einen Anpassungsversuch für das Führungsverhalten, wobei Sollwertsprünge von ± 1K für beide Temperaturen über ein Vorfilter mit Diagonalstruktur aufgebracht werden. Um große Stellamplituden zu vermeiden, werden die Sollwertsprünge durch Tiefpässe 1. Ordnung mit Zeitkonstanten um 270 sec für die Kopf- und 190 sec für die Sumpftemperatur verzögert aufgeschaltet. Die Adaption ist bis ca. t=100 min für die Sumpftemperatur zu schwach eingestellt. Daher werden zum Zeitpunkt Δ die Elemente der Bewertungsmatrix $\underline{G}'_{\beta 2}$, die die Einstellung der Reglerparameter nach Gl.(A9.16a) für die Regelschleife der Sumpftemperatur beeinflussen, erhöht, was zu einer schnelleren Konvergenz und zu einem verbesserten Einschwingverhalten führt.

In Bild 5.23 ist das Einschwingverhalten der Regelung dargestellt, wenn die adaptive Mehrgrößenregelung zusätzlich mit entkoppelten PI-Reglern nach Bild 5.24 kaskadiert wird.In der inneren adaptiven Regelschleife wird ein Regler ohne explizites I-Verhalten mit dem Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.11a,b) eingesetzt. Zu Beginn dieses Versuchs sind die Parameter des adaptiven Teilreglers wie bei den beiden vorangehenden Versuchen ebenfalls auf Null gesetzt. Das System wird allein durch Störungen erregt, die Sollwerte bleiben konstant.

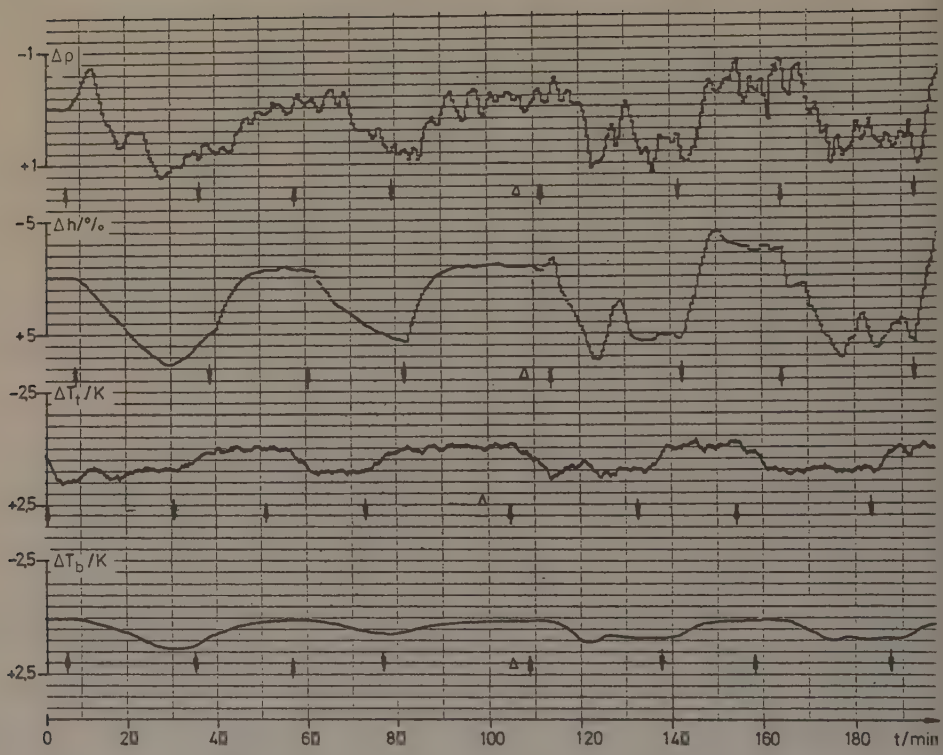



Bild 5.22. Anpassungsversuch bei nicht voreingestelltem Regler (Anfangswerte der Reglerparameter = 0); Regler ohne explizites I-Verhalten; Korrekturnetzwerk nach Gln. (5.8a,b); Sollwertänderungen ±1K (↑|↓)

Bild 5.23. Anpassungsversuch bei nicht voreingestelltem Regler (Anfangswerte der Reglerparameter = 0); adaptiver Regler ohne explizites I-Verhalten in Kaskade mit entkoppelten PI-Reglern nach Bild 5.24; Korrekturnetzwerk nach Gln.(5.11a,b); Zulaufmengen und Konzentrationsstörungen (↑|↓)

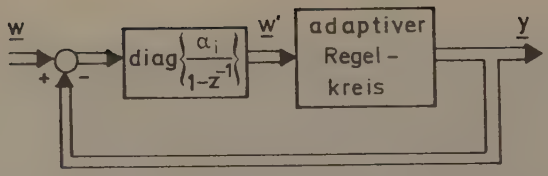



Bild 5.24. Kaskadierte adaptive Mehrgrößenregelung mit entkoppelten PI-Reglern

Für den 1. Störsprung ist die maximale Abweichung der Kopf- und Sumpftemperatur von den Sollwerten kleiner als bei dem in Bild 5.21 gezeigten Experiment. Allerdings ist die Anpassungsgeschwindigkeit der Reglerparameter geringer, wie man deutlich erkennt. Dies hängt wohl damit zusammen, daß die PI-Regler aufgrund ihres Tiefpaßcharakters die Erregung der inneren adaptiven Schleifen, d.h. die Identifikation der Reglerparameter erschweren. Die Stabilität der in Bild 5.24 gezeigten Kaskade ist nicht garantiert, und eine günstige Wahl der Verstärkungen $\alpha_i$ der PI-Regler kann schwierig sein. Wenn keine a priori Information über die Regelstrecke verfügbar ist, so sollten diese Verstärkungen bei der Inbetriebnahme der Regelung sehr klein gewählt werden, so daß die äußere Schleife nahezu offen ist. Durch PRBS Testsignale, die kurzfristig auf den Vektor $\underline{w}'$, also auf den Sollwertvektor für die innere adaptive Regelschleife aufgeschaltet werden, kann dann zunächst die Einstellung des adaptiven Reglers beschleunigt werden. Mit fortschreitender Adaption werden dann die Verstärkungen der PI-Regler im on-line Betrieb erhöht.

Mit dem adaptiven Mehrgrößenregler ist eine zufriedenstellende Regelung der Destillationskolonne bei einem günstigen (insbesondere auch preisgünstigen) Stellverhalten bei geringem Entwurfs- und Einstellaufwand möglich. Die Regelgüte wird von Wiemer (1982) mit anderen Reglern, die für dieselbe Destillationskolonne eingesetzt worden sind, verglichen. Es zeigt sich, daß auch mit einem linearen Zustandsregler unter Einsatz eines Beobachters die Destillationskolonne zufriedenstellend geregelt werden kann. Allerdings

wird für den Entwurf und die Einstellung des Zustandsreglers einschließlich des Beobachters wesentlich mehr a priori-Kenntnis benötigt. Ferner müssen einige Parameter des Zustandsreglers von Zeit zu Zeit manuell nachgestellt werden (insbesondere bei einer erneuten Inbetriebnahme des Reglers). Gerade in diesen beiden Punkten ist aber der adaptive Regler überlegen, der ein manuelles Nachstellen der Reglerparameter überflüssig macht.

Bei dieser Anwendung wurde der Regelalgorithmus als Fortran Programm auf einem Minirechner mit einer LSI 11/23 CPU realisiert. Die Rechenzeit liegt hier zwischen 100 ms und 200 ms pro Abtastschritt, wobei 21 Reglerparameter on-line eingestellt werden.

## 5.4. Abschließende Beurteilung des adaptiven Reglers

Die Experimente mit den Laboranlagen zeigen, daß zumindest für eine stabile Regelstrecke mit dem adaptiven Regler relativ einfach eine funktionsfähige Mehrgrößenregelung aufgebaut werden kann, ohne daß ein detailliertes mathematisches Modell der Regelstrecke für alle Betriebsbedingungen vorhanden sein muß. Mit dem einfachen Korrekturnetzwerk nach Gln.(4.100a bis d) kann durch Wahl der Vorfaktoren $K_{Ki}$ ein guter Kompromiß zwischen dem Stellverhalten und dem dynamischen Verhalten der Regelgrößen gefunden werden. Große Beträge dieser Faktoren bewirken eine starke Gewichtung der Stellgrößen bzw. ihrer Inkremente, was auf kleine Stellgrößenänderungen und auf ein langsames dynamisches Verhalten führt.

Mit Recht kann an dieser Stelle eingewendet werden, daß der Regler nicht völlig selbsttätig arbeitet, sondern eine Einstellung der Vorfaktoren des Korrekturnetzwerkes verlangt. Doch führt der Einsatz des adaptiven Reglers zu einer wesentlichen Vereinfachung des Entwurfs. Die Einstellung des Reglers konzentriert sich auf wenige Parameter, eben dieser Vorfaktoren, denen intuitiv eine physikalische Bedeutung zugemessen werden kann. Die Einstellung der restlichen Reglerparameter geschieht automatisch durch den Adaptionsalgorithmus. Dies stellt insbesondere bei Mehrgrößensystemen

eine erhebliche Erleichterung des Entwurfs dar. Die Vorfaktoren des Korrekturnetzwerkes können on-line am Prozeß eingestellt werden, so daß eine aufwendige mathematische a priori Modellbildung entfällt.

Die Auslegung der Bewertungsmatrizen $\underline{G}_i$ nach Gl.(4.50) für die Einstellung der Reglerparameter ist im allgemeinen unkritisch.[1] Sie werden zweckmäßig als Diagonalmatrizen angesetzt, um Rechenzeit und Speicherplatz zu sparen. Für die Wahl der Diagonalelemente liefern die Empfehlungen von Schmid (1979) günstige Werte. Treten Oszillationen der Stell- und Regelgrößen auf, so sollten die Eigenwerte der Matrizen $\underline{G}_i$ verkleinert werden. Bei sehr langsamem Konvergenzverhalten können sie vergrößert werden.

Die experimentellen Ergebnisse sind so ermutigend, daß jetzt durchaus an eine industrielle Anwendung gedacht werden kann.

---

[1] vgl. hierzu auch die Ausführungen in Abschnitt 4.4.7.

# 6. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein direkter adaptiver Regler für Mehrgrößensysteme vorgestellt, der auch dann anwendbar ist, wenn die Regelstrecke keine stabile Inverse besitzt. Dies schließt insbesondere den Fall ein, in dem die Regelstrecke überhaupt keine Inverse besitzt, d. h. wenn sie nicht entkoppelbar ist. Für die Stabilisierung des Regelkreises wird in solchen Fällen eine zusätzliche lineare Rückführung der Stellgrößen eingeführt. Diese Rückführung, das sogenannte Korrekturnetzwerk, wird mit Hilfe von a priori-Kenntnissen bezüglich der Streckenparameter entworfen. Für stabile Regelstrecken müssen hierfür lediglich a priori-Kenntnisse über die statische Verstärkungsmatrix vorliegen, falls ein Regler mit integralem Verhalten eingesetzt wird. Für den Regler ohne integrales Verhalten sind bei stabilen Regelstrecken prinzipiell keine a priori-Kenntnisse erforderlich. Mit dem sehr einfachen Korrekturnetzwerk nach Gln.(4.100a bis d) kann dann bereits sehr effektiv durch die Wahl der Vorfaktoren $K_{Ki}$ der Teilübertragungsfunktionen des Korrekturnetzwerks, die auch im online-Betrieb verstellt werden können, ein Kompromiß zwischen dem dynamischen Verhalten der Regelgrößen und dem Stellverhalten gefunden werden. Bei instabilen Regelstrecken mit einer instabilen Inversen müssen allerdings zur Dimensionierung des Korrekturnetzwerkes a priori-Kenntnisse über die möglichen Bereiche der Strekkenparameter vorliegen. Ferner kann es bei solchen Regelstrecken vorkommen, daß mit dem Korrekturnetzwerk allein keine Stabilisierung des Regelkreises möglich ist, sondern eine zusätzliche Rückführung der Regelgrößen erforderlich ist.

Die vorgestellte Parametrisierung der Regelstrecke gestattet eine einfache Behandlung von Prozessen mit unterschiedlichen Totzeiten in den einzelnen Teilsystemen. Neben der Möglichkeit, das Stellverhalten einzustellen, bietet das Korrekturnetzwerk den Vorteil, daß die Totzeiten der Teilsysteme der Regelstrecke nicht mehr exakt bekannt sein müssen, sondern nur eine untere Schranke für diese Totzeiten abgeschätzt werden muß. Dies erleichtert den Ein-

satz bei totzeitbehafteten Systemen und bietet auch prinzipiell die Möglichkeit, das Verfahren für Regelstrecken mit variablen Totzeiten einzusetzen.

Der lineare Regler, der dem Grundregelkreis mit Korrekturnetzwerk zugrunde liegt, realisiert eine (im Frequenzbereich) bereits gut studierte Struktur. Mit den in dieser Arbeit beschriebenen Methoden können alle Regler, die diese Struktur aufweisen, zu einem adaptiven Regelkonzept erweitert werden. Als Adaptionsalgorithmus wird ein nach der Stabilitätstheorie entworfenes Verfahren der verallgemeinerten stochastischen Approximation angewendet, aus dem sich sowohl das Verfahren der stochastischen Approximation als auch verschiedene "fixed gain"-Verfahren als Spezialfälle ergeben. Least-squares-Verfahren werden im Mehrgrößenfall als zu aufwendig eingeschätzt. Die theoretische Analyse des Adaptionsalgorithmus' führt zu dem Ergebnis, daß die adaptive Regelung auch unter dem Einfluß von Störungen garantiert stabil ist, vorausgesetzt, das Einstellgesetz für Reglerparameter gewährleistet deren Beschränktheit. Für den Regler mit explizitem integralen Verhalten kann dabei theoretisch eine beliebig kleine Schranke für das stationäre Verhalten der natürlichen Fehler, d. h. der Differenzen zwischen dem gewünschten und dem tatsächlichen Verhalten der Regelgrößen, vorgegeben werden. In den Experimenten und auch in ausführlichen Simulationen hat sich jedoch gezeigt, daß praktisch der Adaptionsalgorithmus für das ungestörte System bei Verwendung eines Reglers mit explizitem I-Verhalten auch im gestörten System unverändert übernommen werden kann. In deterministisch gestörten Systemen ergibt sich die interessante - auch theoretisch erklärbare - Tatsache, daß eine schnelle Konvergenz der natürlichen Fehler mit einer weiteren Fehlanpassung ("Detuning") des Reglers verbunden sein kann. Um in stark stochastisch gestörten Systemen einerseits eine schnelle Einstellung der Reglerparameter und andererseits kleine Varianz der Regelgrößen zu ermöglichen, werden variable Gewichtungsfaktoren eingeführt.

Das vorgestellte Regelungskonzept wurde an zwei Laboranlagen experimentell erprobt. Mit einfachen Korrekturnetzwerken konnten hierbei zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden. Aufgrund

der Selbsteinstellung des adaptiven Reglers wird der Entwurfsaufwand gesenkt, und ein manuelles Nachjustieren der Reglerparameter an der realen Anlage entfällt.

Für den ursprünglichen theoretischen Ansatz adaptiver Regelungen wird die Regelstrecke zumindest in den Parametern als völlig unbekannt vorausgesetzt. Häufig kommen dann jedoch Annahmen hinzu, die im konkreten Fall nur mit Hilfe der Parameter der Regelstrekke überprüft werden können. Hierzu zählt z. B. die Annahme der Minimalphasigkeit der Regelstrecke. Die für die theoretische Arbeit sinnvolle Ausgangsposition der im Rahmen bestimmter Annahmen liegenden vollständigen Parameterunsicherheit der Regelstrecke ist für die Praxis unangebracht. Hier ist es vielmehr effektiver, vorhandene a priori-Kenntnisse auch über die Parameter der Regelstrecke in das adaptive Regelungskonzept einfließen zu lassen und die Adaption nur für die Restunsicherheit bezüglich der Streckenparameter vorzusehen. Da der Regler mit Korrekturnetzwerk eine sehr allgemeine Struktur für den Grundregelkreis realisiert, bietet er vielfältige Möglichkeiten, a priori-Kenntnisse zu berücksichtigen. Jedoch kann es bei einer starken Änderung des dynamischen Verhaltens der Regelstrecke vorkommen, daß ein fest eingestelltes Korrekturnetzwerk nicht in allen Betriebspunkten eine zufriedenstellende Regelung ermöglicht. Hier scheint der Einsatz eines veränderlichen Korrekturnetzwerks sinnvoll. Da die Schätzung der Reglerparameter *völlig unabhängig* von den Parametern des Korrekturnetzwerks ist, kann das Korrekturnetzwerk im on-line-Betrieb verändert werden, ohne daß dies die Einstellung der Parameter des adaptiven Kompensators nach Bild 4.1 beeinflußt. Denkbar ist z. B., daß mit Hilfe der sich adaptiv einstellenden Reglerparameter das Ein-/Ausgangsverhalten der Regelstrecke entsprechend der in Anhang A 8 erläuterten Methode bestimmt wird [1] und das Korrekturnetzwerk mit Hilfe von Parameteroptimierungsstrategien,

---

[1] Zur Bestimmung des Ein-/Ausgangsverhaltens reichen Gl.(A8.16a,b) aus.

wie sie in Abschnitt 3.5.2 erörtert werden, unter Verwendung des geschätzten Ein-/Ausgangsverhaltens der Regelstrecke eingestellt wird. Diese automatisierte Auslegung des Korrekturnetzwerks muß nicht in jedem Abtastschritt erfolgen, sondern wird vielmehr in größeren Zeitabständen durchgeführt werden. Ob ein solches Verfahren tatsächlich durchführbar ist und die Anwendung des Reglers wesentlich erleichtert, konnte im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht untersucht werden.

Direkte adaptive Regler haben - wie bereits in der Einführung erwähnt - den Vorteil, daß die Reglerparameter ohne Zwischenrechnung eingestellt werden. Allerdings hängt die Anzahl der Reglerparameter - im Gegensatz zu der Anzahl der Streckenparameter - von den ausgangs- und eingangsseitigen Schrittverzögerungen ab. Für Regelstrecken mit im Verhältnis zur Abtastzeit großer Totzeit kann es deshalb vom Aufwand her günstiger sein, die Strekkenparameter zu schätzen und mit den geschätzten Streckenparametern den Regler in jedem Abtastschritt entsprechend der im Kapitel 2 und 3 dargestellten Entwurfsmethode zu berechnen. Dies führt dann auf ein indirektes adaptives Verfahren mit demselben Grundregelkreis wie im Bild 4.1. (Der Unterschied zwischen beiden Verfahren besteht im Prinzip nur in der Bestimmung der "Prädiktor"-Polynommatrizen $\underline{R}(z^{-1})$ und $\underline{S}(z^{-1})$ in Gl.(2.52). Bei dem direkten Verfahren werden diese direkt geschätzt, bei dem indirekten Verfahren mit Hilfe der geschätzten Streckenparameter berechnet.) Vergleichende Betrachtungen zwischen der indirekten und der direkten Version des hier vorgestellten Regelkonzeptes besonders unter Störungen stehen allerdings noch aus.

## Literaturverzeichnis

Ackermann, J. (1983). Abtastregelung. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

Åström, K.J. (1970). Introduction to stochastic control. Acad. Press, London, 1970.

Åström, K.J. (1980). Design principles for self tuning regulators. In: H. Unbehauen (Editor): Methods and applications in adaptive control. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

Åström, K.J. und B. Wittenmark (1973). On self-tuning regulators. Automatica 9, S. 185-199.

Brent, R.P. (1973). Algorithms for minimization without derivatives. Prentice-Hall, New Jersey, 1973.

Clarke, D.W. und P.J. Gawthrop (1979). Self-tuning control. Proc. IEE, 126, S. 633-640.

Fresewinkel, T. (1981). Entwurf, Aufbau Erprobung einer adaptiven Mehrgrößenregelung mit Referenzmodell. Diplomarbeit ESR-8107, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum, 1981.

Goodwin, G.C., Ramadge, P.J. und P.E. Caines (1980). Discrete-time multivariable adaptive control. IEEE Trans. on Aut. Contr. 25, S. 449-456.

Goodwin, G.C., P.J. Ramadge und P.E. Caines (1981). Discrete time stochastic adaptive control. SIAM Journ. on Contr. and Opt. 19, S. 829-953.

Hahn, V. (1977). Verfahren zum Entwurf adaptiver Regelungssysteme nach der Stabilitätstheorie. Studienarbeit ESR-7612, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum, 1977.

Hahn, V. (1978). Entwurf und Erprobung eines adaptiven Abtastregelsystems nach der Stabilitätstheorie auf dem Prozeßrechner. Diplomarbeit ESR-7713, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum, 1978.

Hahn, V. (1981). Entwurf von einfachen Kompensationsreglern und Korrekturnetzwerken für Mehrgrößensysteme. Interner Bericht ESR-8117, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum, 1981.

Hahn, V. und H. Unbehauen (1982). Direct adaptive control schemes for non-minimum phase systems. Pepr. IEEE Conf. on Applications of Adaptive and Multivariable Control, Hull, 1982, S. 170-175.

Hahn, V., H. Unbehauen und R. Stoffer (1982). Self-tuning control of a multivariable non-minimum phase pilot plant. Pepr. Workshop on Adaptive Control, Florence, S. 465-486.

Hahn, V., H. Röck, Chr. Schmid und P. Wiemer (1983). Some experiences with the application of multivariable adaptive control in chemical and electromechanical plants. "Draft Paper" für den 9. IFAC "World Congress" in Budapest 1984, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung,Ruhr-Universität Bochum, 198

Ioannou, P. und P. Kokotovic (1983). Improvement of robustness of adaptive schemes. Proc. 3rd Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems Theory, Yale University, New Haven, 1983, S. 148-153.

Ionescu, T. und R.V. Monopoli (1977). Discrete model reference adaptive control with an augmented error signal. Automatica 13, S. 507-517.

Kim, C.H. und D.P. Lindorff (1974). Input frequency requirements fo identification through Lyapunov methods. Intern. Journ. of Contr. 20, S. 35-40.

Klein, F. (1978). Erprobung eines adaptiven hyperstabilen Reglers für Mehrgrößensysteme auf dem Prozeßrechner. Diplomarbeit ESR-7802, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum, 1978.

Koivo, H.N. (1980). A multivariable self-tuning controller. Automatica 16, S. 351-366.

Kreisselmeier, G. und R. Steinhauser (1979). Systematische Auslegung von Reglern durch Optimierung eines vektoriellen Gütekriteriums. Regelungstechnik 27, S. 76-79.

Kreisselmeier, G. und K.S. Narendra (1982). Stable model reference adaptive control in the presence of bounded disturbances. IEEE Trans. on Aut. Contr. 27, S. 1169-1175.

Kudva, P. und K.S. Narendra (1974). An identification procedure for multivariable systems. IEEE Trans on Aut. Contr. 19, S. 549-552.

Lacroix, A. (1973). Systemidentifikation mit dem Prony-Verfahren. Regelungstechnik und Prozeßdatenverarbeitung 21, S. 150-157.

Landau, I.D. (1973). Design of discrete model reference adaptive systems using the positivity concept. Proc. 3rd IFAC Symp. on Sensitivity, Adaptivity and Optimality, Ischia, 1973, S. 307-314.

Landau, I.D. (1979). Adaptive Control - The Model Reference Approach. Marcel Dekker, New York, 1979.

Landau, I.D. (1980). An extension of a stability theorem applicable to adaptive control. IEEE Trans. on Aut. Contr. 25, S. 814-817.

Landau, I.D. (1982). Near supermartingales for convergence analysis of recursive identification and adaptive control schemes. Intern. Journ. of Contr. 35, S. 197-226.

Lozano, R. und I.D. Landau (1981). Redesign of explicit and implicit discrete time model reference adaptive control schemes. Intern. Journ. of Contr. 33, S. 247-268.

Lyaponov, M.A. (1966). Stability of motion. New York, 1966.

Mac Farlane, A.G.J. und N. Karcanias (1976). Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. Intern. Journ. of Contr. 24, S. 33-74.

Monopoli, R.V. (1974). Model reference adaptive control with an augmented error signal. IEEE Trans. on Aut. Contr. 19, S.474-484.

Nadolph, U. (1982). Entwurf und Einsatz von Korrekturnetzwerken für die adaptive Regelung von diskreten nichtminimalphasigen Mehrgrößensystemen nach dem Modellvergleichsverfahren. Diplomarbeit ESR-8203, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum, 1982.

Narendra, K.S., S.S. Tripathi, G. Lüders und G. Kudva (1971). ----. Techn. Report Nr. CT-43, Yale University, New Haven, 1971. s. auch Proc. 5th Asilomar Conf., USA, 1971, S. 596.

Narendra, K.S. und L. Valavani (1978). Stable adaptive controller design - direct control. IEEE Trans. on Aut. Contr. 23, S. 570-583.

Narendra, K.S. und Y.H. Lin (1980). Stable discrete adaptive control IEEE Trans. on Aut. Contr. 25, S. 456-461.

Narendra, K.S., Y.H. Lin und L.S. Valavani (1980). Stable adaptive control design, Part II: Proof of stability. IEEE Trans. on Aut. Contr. 25, S. 440-448.

Narendra, K.S. und A.M. Annaswamy (1983). Persistent excitation and robust adaptive algorithms. Proc. 3rd Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems Theory, Yale University, New Haven, 1983, S. 11-18.

Nöth, G. (1982). Self-Tuning-Strategien zur Regelung nichtminimalphasiger Regelstrecken. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1982.

Ohkawa, F. und Y. Yonezawa (1982). A model reference adaptive control system for discrete multivariable systems with time delays. Int. Journ. of Contr. 36, S. 925-934.

Parks, P.C. (1966). Lyapunov redesign of model reference adaptive control systems. IEEE Trans. on Aut. Contr. 11, S. 362-368.

Parks, P.C. und V. Hahn (1981). Stabilitätstheorie. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

Patel, R.V.(1977). Multivariable zeros and their properties. In: F. Fallside (Editor): Control system design by pole-zero placement. Acad. Press, New York, London, 1977, S. 145-165.

Patel, R.V. und N. Munro (1982). Multivariable system theory and design. Intern. Series on Systems and Control, Vol. 4, Pergamon Press, Oxford, Frankfurt, 1982.

Peterson, B.B. und K.S. Narendra (1982). Bounded error adaptive control. IEEE Trans. on Aut. Contr. 27, S. 1161-1168.

Popov, V.M. (1973). Hyperstability of control systems. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

Postlethwaite, I. (1977). A generalized inverse Nyquist stability criterion. Intern. Journ. of Contr. 26, S. 325-340.

Postlethwaite, I. und A.G.J. Mac Farlane (1979). A complex variable approach to the analysis of linear multivariable feedback systems. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

Prager, D.L. und P.E.Wellstead (1979). Multivariable pole assignment self tuning regulators. Control Systems Centre Report No. 452, University of Manchester, Institute of Science and Technology, Manchester, 1979.

Roppenecker, G. und H.P. Preuß (1982). Nullstellen und Pole linearer Mehrgrößensystems. Regelungstechnik 30, S. 219-225.

Rosenbrock, H.H. (1970). State space and multivariable theory. Nelson, London, 1970.

Rosenbrock, H.H. (1973). The zeros of a system. Intern. Journ. of Contr. 18, S. 297-299.
siehe auch H.H. Rosenbrock: Correction to "The zeros of a systems". Intern. Journ. of Contr. 20, S. 525-527.

Schmid, Chr. (1979). Ein Beitrag zur Realisierung adaptiver Regelungssysteme mit dem Prozeßrechner. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1979.

Schumann, R. (1982). Digitale parameteradaptive Mehrgrößenregelung - Ein Beitrag zu Entwurf und Analyse. PDV-Bericht 217, Gesellschaft für Kernforschung, Karlsruhe, 1982.

Schwarz, H. (1968). Frequenzgang- und Wurzelortskurvenverfahren. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1968.

Sebakhy, O.A. und A.I.A. Salama (1982). Adaptive control of linear plants with step disturbances. Intern. Journ. of Contr. 36, S. 235-248.

Shaked, U. und A.G.J. Mac Farlane (1977). Design of linear multivariable systems for stability under large parameter uncertainty. Proc. IFAC Symp. on Multivariable Technological Systems, Pergamon Press, 1977, S. 149-157.

Unbehauen, H. (1982). Regelungstechnik I. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1982.

Unbehauen, H. (1983). Regelungstechnik II. Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1983.

Voß, J. (1977). Ein Verfahren für die indirekte Symthese von Abtastregelungen. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1977.

Wang, C.L. und V. Hahn (1982). Entwurf von festeingestellten und adaptiven Kompensationsalgorithmen für MISO-Systeme mit Hilfe von Optimierungsstrategien. Interner Bericht ESR-8217, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum, 1982.

Wiemer, P. (1982). Aufbau und Erprobung einer modelladaptiven Mehrgrößenregelung an einer realen Anlagen. Diplomarbeit ESR-8206, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum, 1982.

Winsor, C.A. und R.J. Roy (1968). Design of model reference adaptive control systems by Lyapunov's second method. IEEE Trans. on Aut. Contr. 13, S. 204.

Wolovich, W.A. (1974). Linear multivariable systems. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.

# Anhang A1

## Lösung der Polynomgleichung

$$P_1(z^{-1}) = z^{-k} X(z^{-1}) + Y(z^{-1})\ P_2(z^{-1})$$

In diesem Anhang wird die Polynomgleichung

$$P_1(z^{-1}) = z^{-k}\ X(z^{-1}) + Y(z^{-1})\ P_2(z^{-1})\ ,\ k \in \mathbb{N}_0 \qquad (A1.1)$$

betrachtet. Gegeben sind die Polynome

$$P_1(z^{-1}) = \sum_{l=0}^{n(P_1)} p_{1l} z^{-l} \qquad (A1.2)$$

und

$$P_2(z^{-1}) = \sum_{l=0}^{n(P_2)} p_{2l} z^{-l}\ . \qquad (A1.3)$$

Gesucht werden Lösungen für die Polynome

$$X(z^{-1}) = \sum_{l=0}^{n(X)} x_l z^{-l} \qquad (A1.4)$$

$$Y(z^{-1}) = \sum_{l=0}^{n(Y)} y_l z^{-l}\ , \qquad (A1.5)$$

die Gl.(A1.1) erfüllen.

Aus Gl.(A1.1) ist zu erkennen, daß der Term $z^{-k}\ X(z^{-1})$ auf die Koeffizienten der Potenzen $z^0, z^{-1}, \ldots, z^{-(k-1)}$ keinen Einfluß hat. Diese Koeffizienten können allein über das Polynom $Y(z^{-1})$ beeinflußt werden. Daher wird $Y(z^{-1})$ mit dem Grad

$$n(Y) = k - 1 + n_Y\ ;\quad n_Y = 0,1,2,\ldots \qquad (A1.6)$$

angesetzt, d. h. der minimale Grad von $Y(z^{-1})$ ist

$$n_{min}(Y) = k - 1\ . \qquad (A1.7)$$

Entsprechend muß $X(z^{-1})$ den Grad

$$n(X) = \max\{n(P_1)-k,\ n(P_2)+n(Y)-k\}$$

$$= \max\{n(P_1)-k,\ n(P_2)+n_Y-1\} \qquad \text{(A1.8)}$$

haben, da die linke und rechte Seite von Gl.(A1.1) den gleichen Grad haben müssen. Dieser Grad ist gleich $\max\{n(P_1),\ n(P_2)+n(Y)\}$, so daß für die Bestimmung der Variablen $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n(X)}, y_0, y_1, \ldots, y_{n(Y)}\}$ durch Koeffizientenvergleich

$$N_G = \max\{n(P_1),\ n(P_2)+n(Y)\}+1$$

$$= \max\{n(P_1),\ n(P_2)+k+n_Y-1\}+1 \qquad \text{(A1.9)}$$

Gleichungen zur Verfügung stehen. Die Anzahl der Variablen ist

$$N_V = n(X)+1+n(Y)+1$$

$$= \max\{n(P_1)-k,\ n(P_2)+n_Y-1\}+k+n_Y+1 \quad . \qquad \text{(A1.10)}$$

Nach Gln.(A1.9) und (A1.10) unterscheidet sich die Anzahl der Variablen von der der Gleichungen um die Differenz

$$N_V - N_G = n_Y \quad . \qquad \text{(A1.11)}$$

Setzt man daher das Polynom $Y(z^{-1})$ mit dem minimalen Grad $k-1$ an, d. h. $n_Y = 0$, so erhält man für die Variablen $\{x_0,\ldots,y_{n(Y)}\}$ ein bestimmtes Gleichungssystem und die Lösung ist eindeutig. Für $n_Y > 0$ ergibt sich ein unterbestimmtes Gleichungssystem, und die Lösung ist mehrdeutig. Diese Lösung soll nun explizit bestimmt werden.

In Tabelle A1.1 ist der Koeffizientenvergleich für einige ausgewählte Potenzen von z durchgeführt worden. Hieraus ergibt sich der folgende Lösungsalgorithmus.

*Fall I:* $k > 0$

1.) $$y_0 = \frac{p_{10}}{p_{20}} \quad . \qquad \text{(A1.12)}$$

| Potenz von z | Koeffizientenvergleich |
|---|---|
| $z^0$ | $p_{10} = y_0 p_{20}$ |
| $z^{-1}$ | $p_{11} = y_0 p_{21} + y_1 p_{20}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $z^{-(k-1)}$ | $p_{1,k-1} = y_0 p_{2,k-1} + y_1 p_{2,k-2} + \ldots + y_{k-1} p_{20}$ |
| $z^{-k}$ | $p_{1k} = x_0 + y_0 p_{2k} + \ldots + y_{k-1} p_{21} + y_k p_{20}$ |
| $z^{-(k+1)}$ | $p_{1,k+1} = x_1 + y_0 p_{2,k+1} + \ldots + y_k p_{21} + y_{k+1} p_{20}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $z^{-m}$ | $p_{1,m} = x_{m-k} + y_{k-1+n_Y-n(P_2)} + \ldots + y_{k-1+n_Y} p_{2,n(P_2)-k+1-n_Y}$ |

Tabelle A1.1. Koeffizientenvergleich für die Polynomgleichung Gl.(A1.1) mit

$m = \max\{n(P_1),\ n(P_2)+n_y+k-1)\}$,

$p_{11} := 0$ für $l > n(P_1)$

$p_{21} := 0$ für $l > n(P_2)$ und $l < 0$

$y_1 := 0$ für $l < 0$

2.) Löse für i = 1,...,k-1 die rekursiven Gleichungen

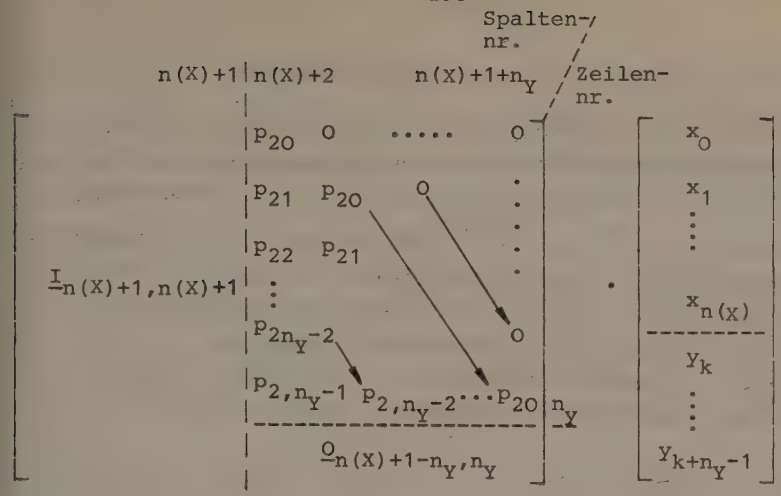
$$y_i = \frac{p_{1i}}{p_{20}} - \sum_{j=0}^{i-1} y_j \frac{p_{2,i-j}}{p_{20}} \qquad \text{(A1.13)}$$

mit

$p_{11} := 0$ für $l > n(P_1)$ und

$p_{21} := 0$ für $l > n(P_2)$ .

3.) Löse das lineare Gleichungssystem nach Gl.(A1.14)




$$= \begin{bmatrix} p_{1k} \\ p_{1k+1} \\ \vdots \\ p_{1,n(P_1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{k-1} y_j \, p_{2,k-j} \\ \sum_{j=0}^{k-1} y_j \, p_{2,k+1-j} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{k-1} y_j \, p_{2,k+n(X)+n_Y-j} \end{bmatrix} \qquad \text{(A1.14)}$$

mit $p_{21} := 0$ für $1 > n(P_2)$ .

Dieses Gleichungssystem kann in der allgemeinen Form

$$\underline{H}_{n(X)+1,\,n(X)+1+n_Y} \underline{x}^* = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \qquad \text{(A1.15)}$$

geschrieben werden. Die Matrix $\underline{H}$ besteht aus drei Teilen, einer "westlichen" $[n(X)+1]x[n(X)+1]$ Einheitsmatrix, einer "südöstlichen" $[n(X)+1-n_Y]x\ n_Y$ Nullmatrix und einer "nordöstlichen" $n_Y \times n_Y$ Dreiecksmatrix, deren 1. Spaltenvektor aus den Koeffizienten $p_{20}, \ldots, p_{2,n_Y-1}$ des Polynoms $P_2(z^{-1})$ gebildet wird. Von Spalte zu Spalte werden die Koeffizienten um einen Platz nach unten verschoben, der letzte Koeffizient wird jeweils weggelassen. Die restlichen Elemente dieser Teilmatrix sind gleich Null.

Für den Fall $n_Y > n(X) + 1$ existiert die südöstliche Nullmatrix nicht.

Der $[n(X)+1+n_Y] \times 1$ Vektor $\underline{x}^*$ enthält die Variablen $\{x_0,\ldots, x_{n(X)}, y_k,\ldots, y_{n(Y)}\}$.

Die rechte Seite von Gl.(A1.14) besteht aus zwei Teilen. Der erste $[n(X)+1+n_Y] \times 1$ Vektor $\underline{v}_1$ wird aus den Koeffizienten der oberen Potenzen von $z^{-k}$ bis $z^{-n(P_1)}$ des Polynoms $P_1(z^{-1})$ gebildet. Für $n(X)+1+n_Y > n(P_1)-k+1$ wird dieser Vektor von unten mit Nullen aufgefüllt. Der zweite $[n(X)+1+n_Y] \times 1$ Vektor $\underline{v}_2$ wird mit Hilfe der aus Schritt 2, Gl.(A1.13), berechneten Variablen $y_j$, $j = 1,\ldots,k-1$, und den Koeffizienten des Polynoms $P_2(z^{-1})$ derart gebildet, daß für das Element $v_{2\kappa}$ dieses Vektors

$$v_{2\kappa} = \sum_{j=0}^{k-1} y_j \, p_{2,k+\kappa-j-1} \; ; \; \kappa = 1,\ldots,n(X)+1+n_Y \qquad \text{(A1.17)}$$

mit

$$p_{2l} := 0 \quad \text{für} \quad l > n(P_2)$$

gilt.

*Fall II:* $k = 0$

In diesem Fall entfallen die Schritte 1 und 2, d. h. Gl.(A1.12) und Gl.(A1.13), und es wird nur Gl.(A1.14) ausgewertet.

Gl.(A1.13) zeigt, daß die Koeffizienten $y_0,\ldots,y_{k-1}$ des Polynoms $Y(z^{-1})$ unabhängig von der Wahl von $n_Y$ stets eindeutig festliegen. Hingegen können von den Koeffizienten, die in dem Vektor

$$\underline{x}^{*T} = (x_0,\ldots,x_{n(X)}, y_k,\ldots,y_{k+n_Y-1})$$

nach Gl.(A1.14) zusammengefaßt sind, $n_Y$ Variable beliebig gewählt werden. Für $n_Y = 0$ ergibt sich aus Gl.(A1.14) die eindeutige Lösung

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n(X)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,k} \\ \vdots \\ p_{1,n(P_1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{k-1} y_j \, p_{2,k-j} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{k-1} y_j \, p_{2,k+n(X)-j} \end{bmatrix} \qquad \text{(A1.17)}$$

mit $p_{21} := 0$ für $l > n\ (P_2)$ .

Die eindeutige Lösung der Polynomgleichung (A1.1) erhält man somit auf rein rekursive Weise, ohne ein Gleichungssystem lösen zu müssen.

# Anhang A2

Beweis von Satz 3.3.

Aufgrund der besonderen Struktur der Transformationsmatrizen nach Gl.(3.103a) sind die Elemente der Matrix $\bar{\underline{G}}_{Ed}^{(i-1)}(z^{-1})$, die oberhalb der i-ten Zeile stehen, gegenüber der Transformation nach Gl.(3.102) invariant. Es gilt also

$$\bar{G}_{EdTl,j}^{(i-1)}(z^{-1}) = \bar{G}_{Edl,j}^{(i-1)}(z^{-1}) \quad \text{für } l = 1 \text{ bis } i-1 \text{ und } j = 1 \text{ bis } q\,. \tag{A2.1}$$

Die Matrix $\bar{\underline{G}}_{Ed}^{(q)}(z^{-1})$, die sich im letzten Schritt nach Gl.(3.109) ergibt, besitzt demnach obere Dreiecksform, da ja für i = 2 bis q die Elemente der Matrizen $\bar{\underline{G}}_{Ed}^{(i-1)}(z^{-1})$, die in der (i-1)-ten Spalte unterhalb der Hauptdiagonalen stehen, durch die Transformationen nach Gl.(3.102) zu Null ergänzt werden. Die Hauptdiagonalelemente von $\bar{\underline{G}}_{Ed}^{(q)}(z^{-1})$ sind entsprechend Gln.(3.98), (3.106) und (A2.1) durch die Beziehung

$$\bar{G}_{EdT,i,i}^{(q)}(z^{-1}) = \bar{G}_{EdTi,i}^{(i-1)}(z^{-1}) + \bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1}) \tag{A2.2}$$

festgelegt, wobei formal

$$\bar{\underline{G}}_{Ed}^{(0)}(z^{-1}) = \bar{\underline{G}}_{d}(z^{-1}) \tag{A2.3}$$

gesetzt wird. Da $\bar{\underline{G}}_{Ed}^{(q)}(z^{-1})$ Dreiecksform hat, gilt

$$\begin{aligned} \det \bar{\underline{G}}_{Ed}^{(q)}(z^{-1}) &= \prod_{i=1}^{q} \bar{G}_{Edi,i}^{(i)}(z^{-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{q} \left[ \bar{G}_{EdTi,i}^{(i-1)}(z^{-1}) + \bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1}) \right]. \end{aligned} \tag{A2.4}$$

Da die Übertragungsfunktionen $\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})$ so gewählt werden, daß Gln.(3.99) und (3.107) für alle i = 2 bis q erfüllt sind, folgt aus Gl.(A2.4):

$$\det \underline{\bar{G}}_{Ed}^{(q)}(z^{-1}) \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1 . \qquad \text{(A2.5)}$$

Die Matrix $\underline{\bar{G}}^{(q)}(z^{-1})$ kann nun entsprechend dem sequentiellen Entwurfsalgorithmus, Gl.(3.102) und Gl.(3.109), durch folgende Rekursion gewonnen werden:

$$\begin{aligned}
\underline{\bar{G}}_{Ed}^{(q)}(z^{-1}) &= \underline{\bar{G}}_{EdT}^{(q-1)}(z^{-1}) + \underline{\bar{G}}_{Kd}^{(q)}(z^{-1}) \\
&= \underline{T}^{(q-1)}(z^{-1})\ \underline{\bar{G}}_{Ed}^{(q-1)}(z^{-1}) + \\
&\quad + \underline{\bar{G}}_{Kd}^{(q)}(z^{-1}) \\
&= \underline{T}^{(q-1)}(z^{-1})\ [\underline{\bar{G}}_{EdT}^{(q-2)}(z^{-1}) + \underline{\bar{G}}_{Kd}^{(q-1)}] + \\
&\quad + \underline{\bar{G}}_{Kd}^{(q)}(z^{-1}) \\
&= \underline{T}^{(q-1)}(z^{-1}) \cdot \\
&\quad [\underline{T}^{(q-2)}(z^{-1})\ \underline{\bar{G}}_{Ed}^{(q-2)}(z^{-1}) + \\
&\quad + \underline{\bar{G}}_{Kd}^{(q-1)}(z^{-1})] + \\
&\quad + \underline{\bar{G}}_{Kd}^{(q)}(z^{-1}) \\
&= \underline{T}^{(q-1)}(z^{-1}) \cdot \\
&\quad [\underline{T}^{(q-2)}(z^{-1})\ [\underline{\bar{G}}_{EdT}^{(q-3)} + \underline{\bar{G}}_{Kd}^{(q-2)}(z^{-1})] + \\
&\quad + \underline{\bar{G}}_{Kd}^{(q-1)}(z^{-1})] + \\
&\quad + \underline{\bar{G}}_{Kd}^{(q)}(z^{-1})
\end{aligned}$$

$$= \underline{T}^{(q-1)}(z^{-1}) \; [\underline{T}^{(q-2)}(z^{-1}) \cdot$$

$$[\underline{T}^{(q-3)}(z^{-1}) \; \ldots \; [\underline{T}^{(1)}(z^{-1}) \cdot$$

$$[\bar{\underline{G}}_d(z^{-1}) + \bar{\underline{G}}_{Kd}^{(1)}(z^{-1})] +$$

$$+ \bar{\underline{G}}_{Kd}^{(2)}(z^{-1})] + \bar{\underline{G}}_{Kd}^{(3)}(z^{-1})] + \ldots +$$

$$+ \bar{\underline{G}}_{Kd}^{(q-1)}(z^{-1})] + \bar{\underline{G}}_{Kd}^{(q)}(z^{-1}) \; . \qquad \text{(A2.6)}$$

Aufgrund der Form der Transformationsmatrizen $\underline{T}^{(i)}(z^{-1})$ nach Gl. (3.103a) und der Struktur der Matrizen $\bar{\underline{G}}_{Kd}^{(i)}(z^{-1})$ nach Gl.(3.108) folgt

$$\underline{T}^{(i)}(z^{-1}) \cdot \bar{\underline{G}}_{Kd}^{(j)}(z^{-1}) = \bar{\underline{G}}_{Kd}^{(j)}(z^{-1}) \text{ für alle } j > i \; . \qquad \text{(A2.7)}$$

Somit kann Gl.(A2.6) auch in der Form

$$\bar{\underline{G}}_{Ed}^{(q)}(z^{-1}) = \left[\prod_{\mu=1}^{q-1} \underline{T}^{(\mu)}(z^{-1})\right] \left[\bar{\underline{G}}_d(z^{-1}) + \sum_{\mu=1}^{q} \bar{\underline{G}}_{Kd}^{(\mu)}(z^{-1})\right] \qquad \text{(A2.8)}$$

geschrieben werden. Mit Gl.(3.108) und Gl.(3.110) ergibt sich aus Gl.(A2.8)

$$\bar{\underline{G}}_{Ed}^{(q)}(z^{-1}) = \left[\prod_{\mu=1}^{q-1} \underline{T}^{(\mu)}(z^{-1})\right] [\bar{\underline{G}}_d(z^{-1}) + \bar{\underline{G}}_{Kd}(z^{-1})] \; . \qquad \text{(A2.9)}$$

Die Determinanten der Transformationsmatrizen nach Gl.(3.103a) sind gleich Eins, so daß

$$\det [\bar{\underline{G}}_d(z^{-1}) + \bar{\underline{G}}_{Kd}(z^{-1})] = \det \bar{\underline{G}}_{Ed}^{(q)}(z^{-1}) \qquad \text{(A2.10)}$$

ist. Entsprechend Gl.(A2.5) gilt also

$$\det [\bar{\underline{G}}_d(z^{-1}) + \bar{\underline{G}}_{Kd}(z^{-1})] \neq 0 \text{ für alle } z \text{ mit } |z| \geq 1 \; . \qquad \text{(3.77)}$$

Damit ist Satz 3.3 bewiesen.

Die Rekursion nach Gl.(A2.8) gilt natürlich nicht nur für $\underline{\bar{G}}_{Ed}^{(q)}(z^{-1})$. Allgemein folgt nach dem sequentiellen Entwurfsalgorithmus

$$\underline{\bar{G}}_{Ed}^{(i)}(z^{-1}) = \prod_{\mu=1}^{i-1} \left[\underline{T}^{(\mu)}(z^{-1})\right] \left[\underline{\bar{G}}_{d}(z^{-1}) + \sum_{\mu=1}^{i} \underline{\bar{G}}_{Kd}^{(\mu)}(z^{-1})\right]$$

für alle i=2,....,q. (A 2.11)

Da nach Gl.(3.109)

$$\underline{\bar{G}}_{EdT}^{(i-1)}(z^{-1}) = \underline{G}_{Ed}^{(i)}(z^{-1}) - \underline{\bar{G}}_{Kd}^{(i)}(z^{-1})$$

ist, ergibt sich ferner aus Gl.(A 2.11) und Gl.(A2.7)

$$\underline{\bar{G}}_{EdT}^{(i-1)}(z^{-1}) = \prod_{\mu=1}^{i-1} \left[\underline{T}^{(\mu)}(z^{-1})\right] \left[\underline{\bar{G}}_{d}(z^{-1}) + \sum_{\mu=1}^{i-1} \underline{\bar{G}}_{Kd}^{(\mu)}(z^{-1})\right] \quad \text{(A 2.12)}$$

# Anhang A3

Satz A 3.1

Die Regelstrecke nach Gl.(2.1) sei asymptotisch stabil. Dann können Gl.(3.99) und Gl.(3.107) für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$ mit asymptotisch stabilen Übertragungsfunktionen

$$\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1}) = \frac{\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})}{\bar{A}_{Ki,i}(z^{-1})} \quad ; \; i=1,\ldots,q \tag{3.105}$$

erfüllt werden und die Matrizen $\underline{\bar{G}}_{EdT}^{(i-1)}(z^{-1})$ enthalten für alle $i \in \{2,\ldots,q\}$ ebenfalls nur asymptotisch stabile Übertragungsfunktionen.

Beweis: Laut Voraussetzun sind alle Übertragungsfunktionen

$$\bar{G}_{dij}(z^{-1}) = \frac{\bar{B}_{ij}(z^{-1})}{\bar{A}_{ij}(z^{-1})} \quad ; \quad i,j=1,\ldots,q \tag{3.69}$$

der Regelstrecke asymptotisch stabil. Somit kann entsprechend den Ausführungen aus Abschnitt 3.5.1.1 immer eine stabile Übertragungsfunktion $\bar{G}_{Kd11}(z^{-1})$ nach Gl.(3.97) gefunden werden, so daß

$$\bar{G}_{Ed11}^{(1)}(z^{-1}) = \bar{G}_{d11}(z^{-1}) + \bar{G}_{Kd11}(z^{-1}) \tag{3.98}$$

minimalphasig ist, d.h. Gl.(3.99) erfüllt ist.

Da alle $\bar{G}_{dij}(z^{-1})$ für $i,j \in \{1,\ldots,q\}$ asymptotisch stabil sind und $\bar{G}_{Kd11}(z^{-1})$ asymptotisch stabil gewählt wird, sind auch alle Elemente der Matrix $\underline{\bar{G}}_{Ed}^{(1)}(z^{-1})$ nach Gl.(3.101) asymptotisch stabil. Da ferner die Übertragungsfunktion $\bar{G}_{Kd11}(z^{-1})$ des Korrekturnetzwerkes so bestimmt wird, daß $\bar{G}_{Ed11}^{(1)}(z^{-1})$ minimalphasig ist, besteht die Transformationsmatrix $\underline{T}^{(1)}(z^{-1})$ nach Gl.(3.103a,b) nur aus asymptotisch stabilen Übertragungsfunktionen. Somit enthält auch die transformierte Matrix $\underline{\bar{G}}_{EdT}^{(1)}(z^{-1})$ nach Gl.(3.102) nur asymptotisch stabile Übertragungsfunktionen $\bar{G}_{EdTi,j}^{(1)}(z^{-1})$, für alle $i,j \in \{1,\ldots,q$

Nun kann die Beweisführung mittels vollständiger Induktion abgeschlossen werden. Angenommen, die Übertragungsmatrix $\underline{\bar{G}}_{EdT}^{(i-1)}(z^{-1})$ besteht nur aus asymptotisch stabilen Übertragungsfunktionen. Diese Annahme ist entsprechend den vorangegangenen Ausführungen für i=2 erfüllt. Dann kann nach Abschnitt 3.5.1 immer eine asymptotisch stabile Übertragungsfunktion $\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})$ nach Gl.(3.105) gefunden werden, so daß

$$\bar{G}_{Edi,i}^{(i)}(z^{-1}) = \bar{G}_{EdTi,i}^{(i-1)}(z^{-1}) + \bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1}) \qquad (3.106)$$

minimalphasig, d.h. Gl.(3.107) erfüllt ist. Für asymptotisch stabile Funktionen $\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})$ sind auch alle Elemente der Matrix $\underline{\bar{G}}_{Ed}^{(i)}(z^{-1})$ nach Gl.(3.109) asymptotisch stabil. Aufgrund der Minimalphasigkeit von $\bar{G}_{Edi,i}^{(i)}(z^{-1})$ folgt damit weiterhin, daß alle Elemente der Transformationsmatrix $\underline{T}^{(i)}(z^{-1})$ nach Gl.(3.103a,b) asymptotisch stabil sind. Aus Gl.(3.102) ergibt sich dann, daß auch die Matrix $\underline{\bar{G}}_{EdT}^{(i)}(z^{-1})$ nur asymptotisch stabile Übertragungsfunktionen enthält. Damit ist Satz A 3.1 bewiesen.

# Anhang A 4

## Stabilisierung der sich nach dem sequentiellen Entwufsalgorithmus für das Korrekturnetzwerk ergebenden Übertragungsfunktion $\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})$ nach Gl.(3.104) mittels meßbarer Ein- und Ausgangssignale der Regelstrecke

Um die Übertragungsfunktion $\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})$ nach Gl.(3.104) mit einer Rückführung stabilisieren zu können, soll zunächst ihre physikalische Bedeutung geklärt werden.

Für i=1 wird diese Funktion entsprechend Gl.(3.98) als

$$\bar{G}^{(O)}_{EdT11}(z^{-1}) := \bar{G}_{d11}(z^{-1}) \qquad \text{(A 4.1)}$$

definiert (vgl. Gl.(3.114a)). Die Polstellen von $\bar{G}_{d11}(z^{-1})$ sind eine Teilmenge der Pole von

$$G_{d11}(z^{-1}) = z^{-\bar{d}_e}\, z^{-d^a_1}\, \bar{G}_{d11}(z^{-1}) \qquad \text{(A 4.2)}$$

($G_{d11}(z^{-1})$ besitzt noch zusätzliche Pole bei z=0, die von den Totzeiten $\bar{d}_e$ und $d^a_1$ herrühren). Die Übertragungsfunktion $G_{d11}(z^{-1})$ kann durch eine zusätzliche Rückführung $G_{F1}(z^{-1})$ von dem Ausgang $y_1(z)$ zu der Hilfsgröße $u_{d1}(z)$ gemäß Bild A 4.1 stabilisiert werden.

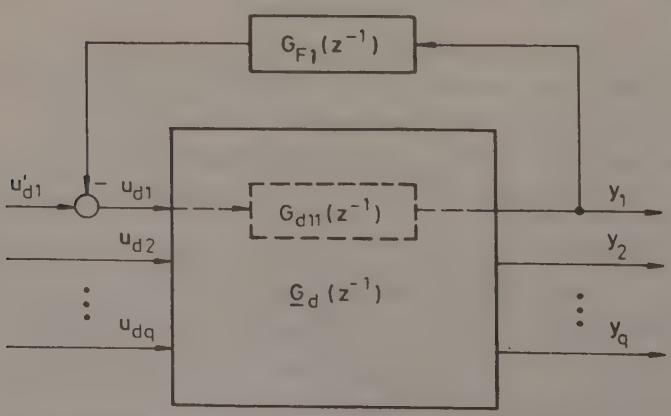



Bild A 4.1. Blockschaltbild zur Stabilisierung von $\bar{G}_{d11}(z^{-1})$

Ist die Übertragungsfunktion

$$G'_{d11}(z^{-1}) = \frac{G_{d11}(z^{-1})}{1 + G_{F1}(z^{-1}) G_{d11}(z^{-1})} \qquad \text{(A 4.3)}$$

(asymptotisch) stabil, so gilt dies auch für die Übertragungsfunktion

$$\bar{G}'_{d11}(z^{-1}) = \frac{\bar{G}_{d11}(z^{-1})}{1 + G_{F1}(z^{-1}) G_{d11}(z^{-1})} \qquad \text{(A 4.4)}$$

da sich $G'_{d11}(z^{-1})$ und $\bar{G}'_{d11}(z^{-1})$ nur durch eine reine Schrittverzögerung (Totzeit) nach Gl.(A 4.2) unterscheiden.

Es soll nun der Fall i>1 betrachtet werden. Die Matrix $\underline{\bar{G}}_{EdT}^{(i-1)}$ kann durch sukzessives Einsetzen der Gln.(3.109), (3.102) und unter Beachtung der Eigenschaft nach Gl.(A 2.7 ) der Transformationsmatrix durch die Rekursion

$$\underline{\bar{G}}_{EdT}^{(i-1)}(z^{-1}) = \left[\prod_{\mu=1}^{i-1} \underline{T}^{(\mu)}(z^{-1})\right]\left[\underline{\bar{G}}_{d}(z^{-1}) + \sum_{\mu=1}^{i-1} \underline{\bar{G}}_{\check{K}d}^{(\mu)}(z^{-1})\right]^{1)} \qquad \text{(A 4.5)}$$

gewonnen werden. Das Matrixprodukt der Transformationsmatrizen wird mit

$$\underline{\Theta}^{(i-1)}(z^{-1}) = \prod_{\mu=1}^{i-1} \underline{T}^{(\mu)}(z^{-1}) \qquad \text{(A 4.6)}$$

bezeichnet. Aufgrund der Struktur der Matrizen $\underline{\bar{G}}_{Kd}^{(i)}(z^{-1})$ nach Gl.(3.100) gilt

$$\sum_{\mu=1}^{i-1} \underline{\bar{G}}_{Kd}^{(\mu)}(z^{-1}) = \left[\begin{array}{ccc|c} \bar{G}_{Kd11}(z^{-1}) & & \underline{0} & \\ & \bar{G}_{Kd22}(z^{-1}) & & \underline{0} \\ \underline{0} & & \ddots & \\ & & \bar{G}_{Kdi-1,i-1}(z^{-1}) & \\ \hline & \underline{0} & & \end{array}\right] . \qquad \text{(A 4.7)}$$

Kennzeichnet man mit $\left[\underline{\vartheta}_i^{(i-1)}(z^{-1})\right]^T$ den i-ten Zeilenvektor der

---

1) vgl. Gl.(A 2.12)

Matrix $\underline{\Theta}^{(i-1)}(z^{-1})$, so erhält man aus Gl.(A 4.5) unter Berücksichtigung von Gl.(A 4.6) und Gl.(A 4.7) für das Diagonalelement

$$\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1}) = \left[\underline{\vartheta}^{(i-1)}_{i}(z^{-1})\right]^T \begin{bmatrix} \bar{G}_{d1i}(z^{-1}) \\ \vdots \\ \bar{G}_{dqi}(z^{-1}) \end{bmatrix}. \qquad \text{(A 4.8)}$$

Berücksichtigt man ferner, daß aufgrund von Gl.(3.103a) die (i+1)-te bis q-te Komponente des Vektors $\left[\underline{\vartheta}^{(i-1)}_{i}(z^{-1})\right]^T$ identisch Null ist, d.h.

$$\Theta^{(i-1)}_{ij}(z^{-1}) \equiv 0 \quad \text{für } j>i \qquad \text{(A 4.9)}$$

und definiert nun den ix1 Vektor

$$\left[\bar{\underline{\vartheta}}^{(i-1)}_{i}(z^{-1})\right]^T = \left[\Theta^{(i-1)}_{i1}(z^{-1}),\ldots,\Theta^{(i-1)}_{ii}(z^{-1})\right], \qquad \text{(A 4.10)}$$

so ergibt sich aus Gl.(A 4.8)

$$\bar{\underline{G}}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1}) = \left[\bar{\underline{\vartheta}}^{(i-1)}_{i}(z^{-1})\right]^T \begin{bmatrix} \bar{G}_{d1i}(z^{-1}) \\ \vdots \\ \bar{G}_{dii}(z^{-1}) \end{bmatrix}. \qquad \text{(A 4.11)}$$

Mit $d^a_{i,max}$ wird die maximale Schrittverzögerung

$$d^a_{i,max} = \max_{1\le\mu\le i} \{d^a_\mu\} \qquad \text{(A 4.12)}$$

bezeichnet. Es gilt dann

$$d^a_\mu = d^a_{i,max} - \Delta d^a_\mu \qquad \text{(A 4.13)}$$

mit

$$\Delta d^a_\mu \ge 0 \quad \text{für } 1\le\mu\le i. \qquad \text{(A 4.14)}$$

Nun folgt aus Gl.(A 4.11) und Gl.(3.68a)

$$z^{-\bar{d}_e}\, z^{-d^a_{i,max}}\, \bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1}) =$$

$$\left[\theta^{(i-1)}_{i1}(z^{-1})z^{-\Delta d^a_1},\ldots,\theta^{(i-1)}_{ii}(z^{-1})z^{-\Delta d^a_i}\right]\begin{bmatrix} G_{d1i}(z^{-1}) \\ \vdots \\ G_{dii}(z^{-1}) \end{bmatrix} \qquad \text{(A 4.15)}$$

Dies führt für die Übertragungsfunktion $z^{-\bar{d}_e}\, z^{-d^a_{i,max}}\, \bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})$ unter Berücksichtigung von Gl.(3.66 ) auf das Blockschaltbild A 4.2. Das Signal $u_{di}$ steht physikalisch im Regler zur Verfügung, das Signal $y_{\Theta i}$ kann mit Hilfe der Netzwerke

$$\theta^{(i-1)}_{i\mu}(z^{-1})z^{-\Delta d^a_\mu} \quad ; \quad \mu=1,\ldots,i$$

und der Regelgrößen $y_1$ bis $y_i$ leicht synthetisiert werden. Damit ist $z^{-\bar{d}_e}\, z^{-d^a_{i,max}}\, \bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})$ physikalisch leicht realisierbar. Diese Übertragungsfunktion kann nun durch eine Rückführung $G_{Fi}(z^{-1})$ entsprechend Bild A 4.2 stabilisiert werden. Ist die Übertragungsfunktion

$$\frac{z^{-\bar{d}_e}\, z^{-d^a_{i,max}}\, \bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})}{1 + z^{-\bar{d}_e}\, z^{-d^a_{i,max}} G_{Fi}(z^{-1})\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})}$$

(asymptotisch) stabil, dann ist auch die Übertragungsfunktion

$$\bar{G}'^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1}) = \frac{\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})}{1 + z^{-\bar{d}_e}\, z^{-d^a_{i,max}}\, G_{Fi}(z^{-1})\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})}$$

(asymptotisch) stabil.

Im sequentiellen Entwurfsalgorithmus für das Korrekturnetzwerk muß man nun die Funktion $\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})$ durch die modifizierte stabile

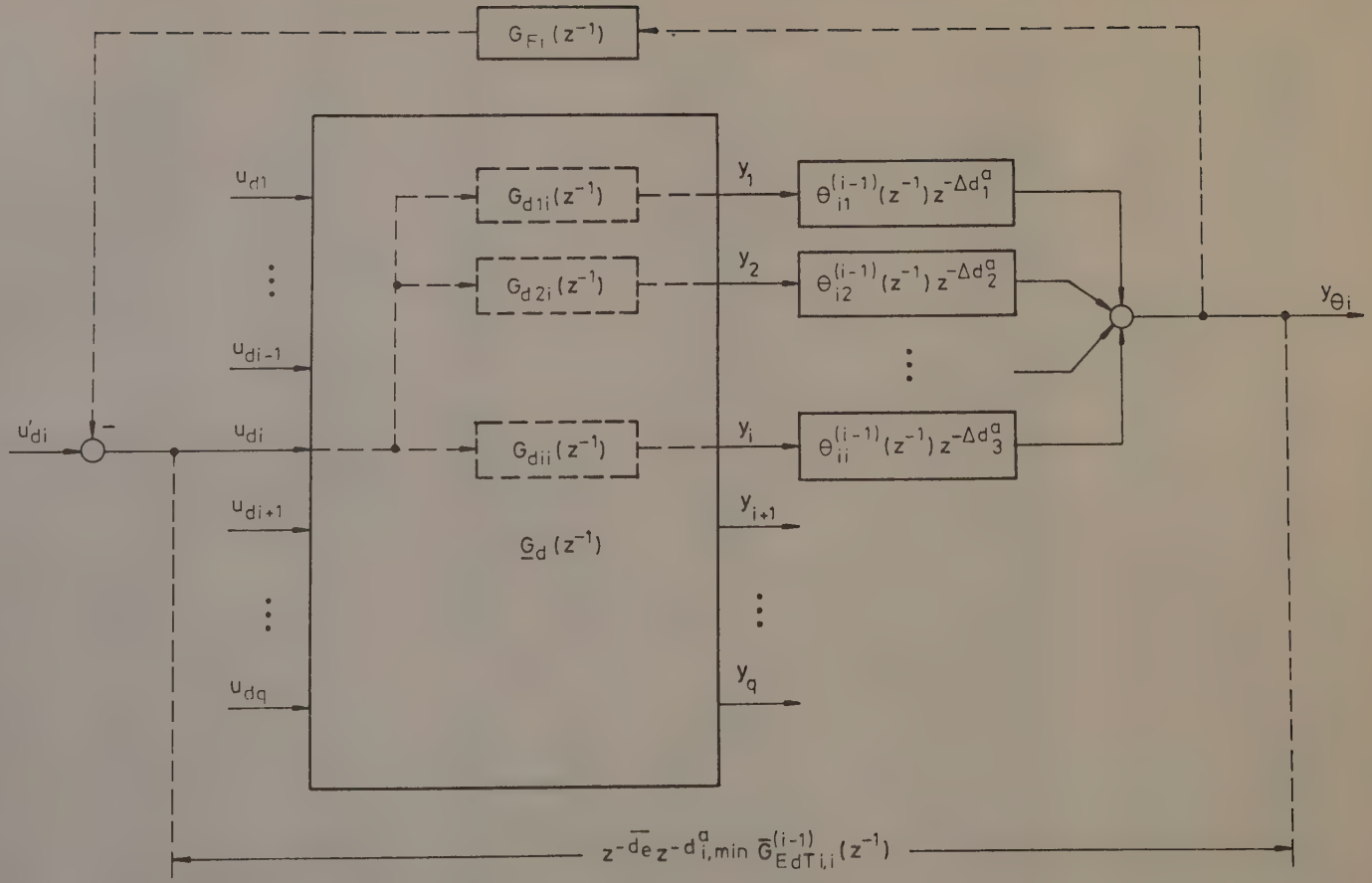



Bild A 4.2. Blockschaltbild zur Stabilisierung von $\bar{G}_{EdTi,i}^{(i-1)}(z^{-1})$

Funktion $\bar{G}'^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})$ ersetzen. Die zu realisierende zusätzliche Rückführung der Regelgrößen $y_1$ bis $y_i$ besteht aus den Netzwerken $\Theta^{(i-1)}_{i1}(z^{-1})z^{-\Delta d^a_1}$ bis $\Theta^{(i-1)}_{ii}(z^{-1})z^{-\Delta d^a_i}$, dem Summenpunkt und dem Netzwerk $G_{Fi}(z^{-1})$ nach Bild A 4.2.

# Anhang A5

Beweis von Satz 3.4

Der Beweis geschieht durch vollständige Induktion. Mit den Definitionen nach Gl.(3.114a,b) ist die Gültigkeit von Gl.(3.113) für $l = 1$ trivial.

Angenommen Gl.(3.113) gilt für ein bestimmtes $l$. Für $\bar{G}_{Kdl,1}(z^{-1}) = 0$ folgt nach Gl.(3.108)

$$\underline{\bar{G}}^{(l)}_{Kd}(z^{-1}) = \underline{0}\,. \tag{A5.1}$$

Damit erhält man nach Gl.(3.109)

$$\underline{\bar{G}}^{(l)}_{Ed}(z^{-1}) = \underline{\bar{G}}^{(l-1)}_{EdT}(z^{-1})\,. \tag{A5.2}$$

Mit Gl.(A5.2) folgt

$$\bar{G}^{(l)}_{Edl+1,l+1}(z^{-1}) = \bar{G}^{(l-1)}_{EdTl+1,l+1}(z^{-1})\,. \tag{A5.3}$$

Mit der Transformation nach Gl.(3.102) ergibt sich dann unter Berücksichtigung von Gl.(3.103a,b)

$$\begin{aligned}\bar{G}^{(l)}_{EdTl+1,l+1}(z^{-1}) &= \bar{G}^{(l-1)}_{EdTl+1,l+1}(z^{-1}) \\ &\quad - \bar{G}^{(l-1)}_{EdTl,l+1}(z^{-1})\,\frac{\bar{G}^{(l-1)}_{EdTl+1,1}(z^{-1})}{\bar{G}^{(l-1)}_{EdTl,1}(z^{-1})} \\ &= \frac{\bar{G}^{(l-1)}_{EdTl+1,l+1}(z^{-1})\,\bar{G}^{(l-1)}_{EdTl,1} - \bar{G}^{(l-1)}_{EdTl,l+1}(z^{-1})\,\bar{G}^{(l-1)}_{EdTl+1,1}(z^{-1})}{\bar{G}^{(l-1)}_{EdTl,1}(z^{-1})}\,.\end{aligned} \tag{A5.4}$$

Aufgrund der singulären Zeilenoperationen nach Gln.(3.102) und (3.103a,b) hat die Matrix $\underline{\bar{G}}^{(l-1)}_{EdT}(z^{-1})$ die Struktur nach Bild A5.1.

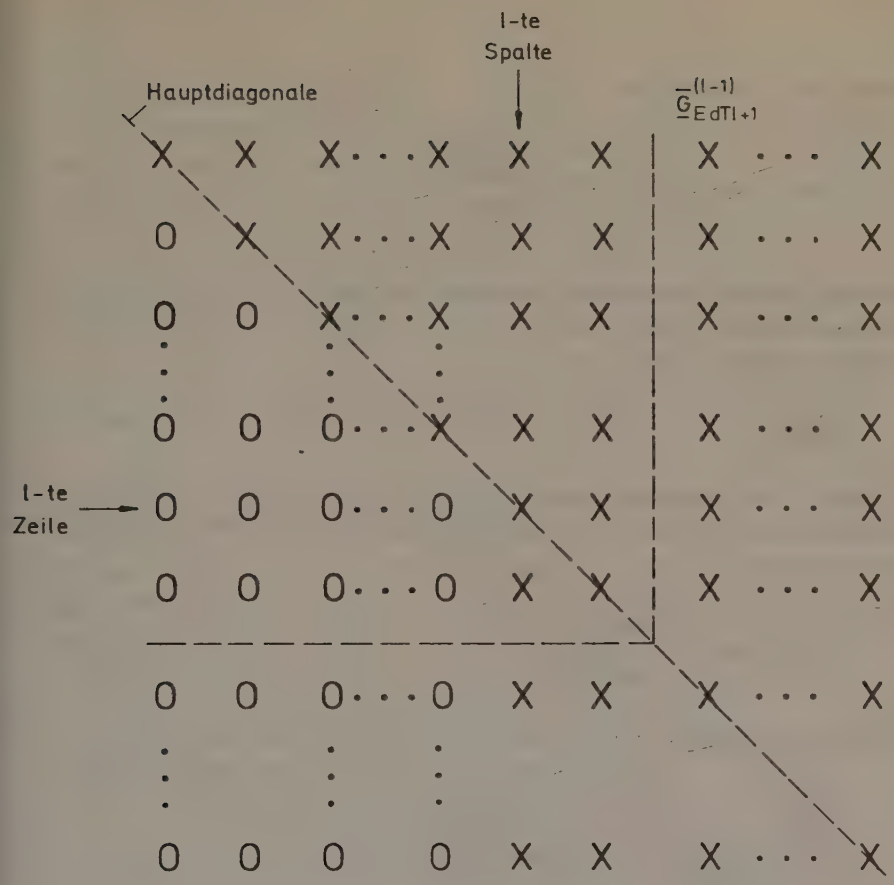



Bild A5.1. Struktur der Matrix $\underline{\bar{G}}^{(l-1)}_{EdT}$ mit der nordwestlichen (l+1) x (l+1)-Untermatrix $\underline{\bar{G}}^{(l-1)}_{EdTl+1}$. Die mit x gekennzeichneten Elemente sind i. a. von Null verschieden.

Für die Determinante der nordwestlichen (l+1) x (l+1)-Untermatrix $\underline{\bar{G}}^{(l-1)}_{EdTl+1}(z^{-1})$ ergibt sich demnach

$$\det \underline{\bar{G}}^{(l-1)}_{EdTl+1}(z^{-1}) = \prod_{i=1}^{l-1} \bar{G}^{(l-1)}_{EdTi,i}(z^{-1}) \cdot$$

$$\cdot [\bar{G}^{(l-1)}_{EdTl+1,l+1}(z^{-1})\ \bar{G}^{(l-1)}_{EdTl,l}(z^{-1}) - \bar{G}^{(l-1)}_{EdTl,l+1}(z^{-1})\ \bar{G}^{(l-1)}_{EdTl+1,l}(z^{-1})] .$$

(A5.5)

Mit Gl.(A5.5) folgt aus Gl.(A5.4):

$$\bar{G}^{(l)}_{EdTl+1,l+1}(z^{-1}) = \frac{\det \bar{G}^{(l-1)}_{EdTl+1}(z^{-1})}{\prod_{i=1}^{l} \bar{G}^{(l-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})} . \qquad (A5.6)$$

Aufgrund des sequentiellen Entwurfsalgorithmus, d. h. insbesondere der sequentiell angewandten Transformation nach Gln.(3.102) und (3.103a,b) gilt

$$\bar{G}^{(l-1)}_{EdTi,i}(z^{-1}) = \bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1}); \; i = 1, \ldots, l, \qquad (A5.7)$$

da beim l-ten Transformationsschritt die 1. bis l-te Zeile unverändert erhalten bleiben. Entsprechend der Induktionsannahme gilt nach Gl.(3.112)

$$\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1}) = \frac{\det \bar{\underline{G}}_{di}(z^{-1})}{\det \bar{\underline{G}}_{di-1}(z^{-1})}; \; i = 1, \ldots, l . \qquad (A5.8)$$

Mit den Gleichungen (A5.7) und (A5.8) ergibt sich aus Gl.(A5.6)

$$\bar{G}^{(l)}_{EdTl+1,l+1}(z^{-1}) = \frac{\det \bar{\underline{G}}^{(l-1)}_{EdTl+1}(z^{-1})}{\prod_{i=1}^{l} \frac{\det \bar{\underline{G}}_{di}(z^{-1})}{\det \bar{\underline{G}}_{di-1}(z^{-1})}}$$

$$= \frac{\det \bar{\underline{G}}^{(l-1)}_{EdTl+1}(z^{-1})}{\det \bar{\underline{G}}_{dl}(z^{-1})} . \qquad (A5.9)$$

Gl.(3.112) gilt somit offensichtlich dann auch für l+1, falls $\det \bar{\underline{G}}^{(l-1)}_{EdTl+1}(z^{-1})$ und $\det \bar{\underline{G}}_{dl+1}(z^{-1})$ unter der Voraussetzung

$$\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1}) \equiv 0; \quad i = 1, \ldots, l$$

nach Satz 3.4 identisch sind. Dies soll im folgenden gezeigt werden.

Die Identität von det $\underline{\bar{G}}_{EdTl+1}^{(l-1)}(z^{-1})$ und det $\underline{\bar{G}}_{dl+1}(z^{-1})$ unter der soeben genannten Voraussetzung von Satz 3.4 ergibt sich daraus, daß in diesem Fall die Matrix $\underline{\bar{G}}_{EdTl+1}^{(-1)}(z^{-1})$ mittels *singulärer* Zeilenoperationen aus der Matrix $\underline{\bar{G}}_{dl+1}(z^{-1})$ gewonnen wird. Entsprechend der speziellen Struktur der Transformationsmatrizen $\underline{T}^{(i-1)}(z^{-1})$ nach Gl.(3.103a) folgt, daß jede nordwestliche νxν Untermatrix der Matrix $\underline{\bar{G}}_{EdT}^{(l-1)}(z^{-1})$ nach Gl.(3.102) als das Matrixprodukt der nordwestlichen Untermatrizen mit der Dimension νxν der Transformationsmatrix $\underline{T}^{(l-1)}(z^{-1})$ einerseits und der Matrix $\underline{\bar{G}}_{Ed}^{(l-1)}(z^{-1})$ andererseits dargestellt werden kann; es gilt

$$\underline{\bar{G}}_{EdT\nu}^{(l-1)}(z^{-1}) = \underline{T}_{\nu}^{(l-1)}(z^{-1})\ \underline{\bar{G}}_{Ed\nu}^{(l-1)}(z^{-1}). \tag{A5.10}$$

Ferner ergibt sich, daß jede nordwestliche νxν Untermatrix des Produktes zweier beliebiger Transformationsmatrizen gleich dem Produkt der nordwestlichen νxν Untermatrizen der einzelnen Transformationsmatrizen ist, d. h.

$$[\underline{T}^{(\mu)}(z^{-1})\ \underline{T}^{(m)}(z^{-1})]_{\nu} = \underline{T}_{\nu}^{(\mu)}(z^{-1})\ \underline{T}_{\nu}^{(m)}(z^{-1}). \tag{A5.11}$$

Nach Anhang A2, Gl.(A2.12), gilt die Rekursion

$$\underline{\bar{G}}_{EdT}^{(l-1)}(z^{-1}) = \left[\prod_{i=1}^{l-1} \underline{T}^{(i)}(z^{-1})\right] \left[\underline{\bar{G}}_{d}(z^{-1}) + \sum_{i=1}^{l-1} \underline{\bar{G}}_{Kd}^{(i)}(z^{-1})\right]. \tag{A5.12}$$

Unter der Voraussetzung nach Satz 3.4 sind alle Matrizen $\underline{\bar{G}}_{Kd}^{(i)}(z^{-1})$ für $i \in \{1,\ldots,l-1\}$ identisch Null. Mit Gl.(A5.10) und Gl.(A5.11) folgt dann aus Gl.(A5.12):

$$\underline{\bar{G}}_{EdTl+1}^{(l-1)}(z^{-1}) = \left[\prod_{i=1}^{l-1} \underline{T}_{l+1}^{(i)}(z^{-1})\right] \underline{\bar{G}}_{dl+1}(z^{-1}). \tag{A5.13}$$

Da entsprechend Gl.(3.103a)

$$\det \underline{T}_{l+1}^{(i)}(z^{-1}) = 1; \quad i,l = 1, \ldots, q \tag{A5.14}$$

ist, ergibt sich aus Gl.(A5.13)

$$\det \underline{\bar{G}}^{(l-1)}_{EdTl+1}(z^{-1}) = \det \underline{\bar{G}}_{dl+1}(z^{-1}). \tag{A5.15}$$

Mit Gl.(A5.15) ergibt sich aus Gl.(A5.9)

$$\bar{G}^{(l)}_{EdTl+1,l+1}(z^{-1}) = \frac{\det \underline{\bar{G}}_{dl+1}(z^{-1})}{\det \underline{\bar{G}}_{dl}(z^{-1})}. \tag{A5.16}$$

Nach Gl.(A5.16) folgt aus der Gültigkeit von Satz 3.4 für ein bestimmtes l auch die Gültigkeit für l+1. Damit ist der Satz bewiesen.

# Anhang A 6

## A 6.1. Beweis von Satz 4.1

Betrachtet wird die nicht negative, stetige und streng monotone Ljapunow-Funktion

$$V(k) = [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)]^T \underline{G}^{-1} [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)], \qquad \text{(A 6.1)}$$

die eine Norm des Parameterfehlervektors $[\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k)]$ darstellt. Diese Funktion erreicht ihr absolutes Minimum

$$V_{min} = 0 \qquad \text{(A 6.2)}$$

für

$$\hat{\underline{p}}(k) = \underline{p}. \qquad \text{(A 6.3)}$$

Setzt man für $\hat{\underline{p}}(k)$ in Gl.(A 6.1) die rechte Seite von Gl.(4.31) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} V(k) = {} & [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-1)]^T \underline{G}^{-1} [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-1)] \\ & - 2r(k) [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-1)]^T \underline{x}(k-\delta) \overline{e}(k) \\ & + r^2(k)\, \underline{x}^T(k-\delta)\, \underline{G}\, \underline{x}(k-\delta)\, \overline{e}^2(k). \end{aligned} \qquad \text{(A 6.4)}$$

Mit Gl.(A 6.1) aufgestellt für den Zeitpunkt k-1, d.h.

$$V(k-1) = [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-1)^T] \; \underline{G}^{-1} \; [\underline{p} - \hat{\underline{p}}(k-1)]$$

und Gl.(4.30) folgt aus Gl.(A 6.4)

$$V(k) = V(k-1) - r(k)\, \overline{e}^2(k) [2 - r(k) \underline{x}^T(k-\delta)\, \underline{G}\, \underline{x}(k-\delta)]. \qquad \text{(A 6.5)}$$

Nach Gl.(4.32) gilt für r(k) bei positivem Anfangswert nach Gl. (4.33) und positiven Gewichtungsfaktoren $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ und $\lambda_3(k)$ nach Gln.(4.34 a bis c)

$$0 \leq r(k) \leq \frac{1}{\lambda_2(k)\underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \quad . \tag{A 6.6}$$

Da nach Gl.(4.34b) $\lambda_2(k)$ echt größer als 1/2 für alle Zeiten ist, folgt aus Gl.(A 6.6)

$$0 \leq r(k) < \frac{2}{\underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta)} \quad . \tag{A 6.7}$$

Gl. (A 6.7) besagt, daß eine positive Zahl $\alpha$ existiert, so daß

$$0 < \alpha \leq 2\text{-}r(k)\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta) \tag{A 6.8}$$

für alle k ist. Mit Gl.(A 6.8) folgt aus Gl.(A 6.5)

$$V(k) \leq V(k-1) - \alpha\ r(k)\ \bar{e}^2(k) \quad . \tag{A 6.9}$$

Der Gradient der Ljapunow-Funktion nach Gl.(A 6.1)

$$\Delta V(k) = V(k) - V(k-1) \leq -\alpha\ r(k)\ \bar{e}^2(k) \leq 0 \tag{A 6.10}$$

ist somit negativ semidefinit, d.h. V(k) ist eine nach unten (durch $V_{min} = 0$ nach Gl.(A 6.2)) beschränkte, monoton fallende Funktionenfolge. Demnach existiert der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} V(k) = V^* = \text{const.}, \tag{A 6.11}$$

und es gilt

$$0 = V_{min} \leq V^* \leq V(k) \tag{A 6.12}$$

für alle $k \geq 0$.
Mit

$$V^* = [\underline{p} - \underline{p}^*]^T\ \underline{G}^{-1}[\underline{p} - \underline{p}^*] \tag{A 6.13}$$

folgt aus den Gleichungen (A 6.1) und (A 6.11) sofort die Gültigkeit von Gl.(4.36).

Da V(k) entsprechend Gl.(A 6.9) bzw. Gl.(A 6.10) monoton abnimmt, gilt stets

$$V(k) \leq V(k-1) \tag{A 6.14}$$

Gl.(A 6.14) ist mit Gl.(4.37) identisch.
Aufgrund von Gl.(A 6.12) bzw. Gl.(A 6.14) gilt insbesondere

$$V^* \leq V(0) \tag{A 6.15}$$

Gl.(A 6.15) ist mit Gl.(4.38) identisch.

Gl.(A 6.11) bedeutet ferner, daß

$$\lim_{k\to\infty} \Delta V(k) = \lim_{k\to\infty} [V(k) - V(k-1)] = 0 \tag{A 6.16}$$

ist. Aus Gl.(A 6.16) ergibt sich mit Gl.(A 6.10)

$$\lim_{k\to\infty} \alpha\, r(k)\, \bar{e}^2(k) = 0. \tag{A 6.17}$$

Da $\alpha$ entsprechend Gl.(A 6.8) echt größer als Null ist, folgt aus Gl.(A 6.17) die Gültigkeit von Gl.(4.35).

Jetzt kann der 2. Teil von Satz 4.1 bewiesen werden. Unter der zusätzlichen Bedingung nach Gl.(4.41) folgt bei positivem $\rho$ und $\gamma$ (vgl. Gl.(4.42a,b))

$$\Delta V(k) = V(k) - V(k-1) \leq - \frac{\alpha \bar{e}^2(k)}{\rho \underline{x}^T(k-\delta)\, \underline{G}\, \underline{x}(k-\delta) + \gamma} \leq 0 \tag{A 6.18}$$

wobei $\alpha$ die positive Konstante nach Gl.(A 6.8) ist. Da $\Delta V(k)$ auch in diesem Fall negativ semidefinit ist, gelten weiterhin Gl.(A 6.11) und Gl.(A 6.16) und die daraus abgeleiteten Beziehungen.

Mit der Bedingung nach Gl.(A 6.16) folgt aus Gl.(A 6.18)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\bar{e}^2(k)}{\rho \underline{x}^T(k-\delta)\, \underline{G}\, \underline{x}(k-\delta) + \gamma} = 0, \tag{A 6.19}$$

da $\alpha$ nach Gl.(A6.8) echt größer als Null ist. Aus Gl.(4.36) erhält man, daß

$$\lim_{k\to\infty} [\underline{\hat{p}}(k) - \underline{\hat{p}}(k-\nu)] = \underline{0} \text{ für alle (ganzzahligen) Konstanten } \nu \tag{A6.20}$$

ist. Nun gilt

$$\begin{aligned}
&\{[\underline{p}-\underline{\hat{p}}(k-\nu)]^T \underline{x}(k-\delta)\}^2 = \\
&= \{[\underline{p}-\underline{\hat{p}}(k-1) + \underline{\hat{p}}(k-1) - \underline{\hat{p}}(k-\nu)]^T \underline{x}(k-\delta)\}^2 \\
&= \bar{e}^2(k) + 2[\underline{\hat{p}}(k-1) - \underline{\hat{p}}(k-\nu)]^T \underline{x}(k-\delta)\ [\underline{p}-\underline{\hat{p}}(k-1)]^T \underline{x}(k-\delta) \\
&\quad + \{[\underline{\hat{p}}(k-1) - \underline{\hat{p}}(k-\nu)]^T \underline{x}(k-\delta)\}^2 .
\end{aligned} \tag{A6.21}$$

Mit Gl.(A6.20) folgt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{[\underline{\hat{p}}(k-1) - \underline{\hat{p}}(k-1)]^T \underline{x}(k-\delta)\ [\underline{p}-\underline{\hat{p}}(k-1)]^T \underline{x}(k-\delta)}{\rho\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta) + \gamma} = 0 \tag{A6.22}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\{[\underline{\hat{p}}(k-1) - \underline{\hat{p}}(k-\nu)]^T \underline{x}(k-\delta)\}^2}{\rho\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta) + \gamma} = 0, \tag{A6.23}$$

selbst wenn $\underline{x}$ unbeschränkt ist. (Man beachte, daß aufgrund von Gl.(4.37) die Differenz $\underline{p}-\underline{\hat{p}}(k)$ beschränkt ist.) Mit den Gln. (A6.21) bis (A6.23) und Gl.(A6.19) ergibt sich

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\{[\underline{p}-\underline{\hat{p}}(k-\nu)]^T \underline{x}(k-\delta)\}^2}{\rho\ \underline{x}^T(k-\delta)\ \underline{G}\ \underline{x}(k-\delta) + \gamma} = 0 \text{ für alle ganzzahligen } \nu. \tag{A6.24}$$

Insbesondere gilt somit Gl.(A6.24) auch für $\nu = \nu_1$; d. h.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\{[p-\hat{p}(k-\nu_1)]^T \underline{x}(k-\delta)\}^2}{\rho\, \underline{x}^T(k-\delta)\, \underline{G}\, \underline{x}(k-\delta) + \gamma} = 0 . \qquad \text{(A6.25)}$$

Nach einem Lemma von Goodwin et al. (1980) folgt aus Gl.(A6.25) und Gln.(4.41) und (4.42) direkt Gl.(4.43) und damit

$$\lim_{k\to\infty} [\underline{p}-\hat{\underline{p}}(k-\nu_1)]^T \underline{x}(k-\delta) = 0 . \qquad \text{(A6.26)}$$

Aus Gl.(4.43), Gl.(A6.20) und Gl.(A6.26) erhält man sofort die Gültigkeit von Gl.(4.44).

## A 6.2. Beweis von Satz 4.2

### A 6.2.1. Herleitung von Gl.(4.57b)

Aufgrund der Definition des Gesamtsignalvektors $\underline{x}$ nach Gl.(4.57a) und der Signalvektoren $\underline{x}_i$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$) nach Gln.(4.24) und (4.10) existieren positive Konstanten $c_0$ und $c_1$ derart, daß

$$\|\underline{x}(k)\| \leq c_0 \sup_{l\leq k} \|\underline{u}_{dI}(l)\| + c_1 \sup_{l\leq k} \|\underline{y}(l)\| \qquad \text{(A6.27)}$$

ist. Mit Gl.(3.4) folgt daraus unter Verwendung der Dreiecksungleichung

$$\|\underline{x}(k)\| \leq c_0 \sup_{l\leq k} \|\underline{u}_{dI}(l)\| + c_1 \sup_{l\leq k} \|\underline{y}_E(l)\| + c_1 \sup_{l\leq k} \|\underline{y}_K(l)\| . \qquad \text{(A6.28)}$$

Nun wird folgendes Standard-Lemma benutzt:

Lemma A6.1: Gegeben sei das lineare, asymptotisch stabile System, dessen Übertragungsverhalten im Frequenzbereich durch die Vektorgleichung

$$\underline{x}_a(z) = \underline{G}(z^{-1})\, \underline{x}_e(z) \qquad \text{(A6.29)}$$

beschrieben wird. Dann existieren positive Konstanten $\tilde{c}_0$ und $\tilde{c}_1$ derart, daß

$$\|\underline{x}_a(k)\| \leq \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 \sup_{1 \leq k} \|\underline{x}_e(1)\| \tag{A6.30}$$

für alle $k \geq 0$ ist.

Beweis: Für den Ausgangsvektor $\underline{x}_a$ gilt im Zeitbereich

$$\underline{x}_a(k) = \sum_{1=0}^{k} \underline{\Gamma}(k-1)\ \underline{x}_e(1) + \sum_{\mu=1}^{N} \underline{\gamma}_\mu\ \lambda_\mu^k . \tag{A6.31}$$

Hierbei ist

$$\underline{\Gamma}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\ \{G(z^{-1})\} \tag{A6.32}$$

die zu dem System nach Gl.(A6.29) gehörende Gewichtsfolgematrix; $\lambda_\mu$ sind die Eigenwerte des Systems und $\underline{\gamma}_\mu$ Koeffizientenvektoren, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden. N ist die Ordnung des Systems. Für asymptotisch stabile Systeme ist

$$\|\lambda_\mu\| < 1 \text{ für alle } \mu . \tag{A6.33}$$

Somit gilt

$$\Big\| \sum_{\mu=1}^{N} \underline{\gamma}_\mu\ \lambda_\mu^k \Big\| \leq \sum_{\mu=1}^{N} \|\underline{\gamma}_\mu\| := \tilde{c}_0 . \tag{A6.34}$$

Aus Gl.(A6.31) folgt dann

$$\|\underline{x}_a(k)\| \leq \tilde{c}_0 + \Big\| \sum_{1=0}^{k} \underline{\Gamma}(k-1)\ \underline{x}_e(1) \Big\|$$

$$\leq \tilde{c}_0 + \Big[ \sum_{1=0}^{k} \|\underline{\Gamma}(k-1)\| \Big] \sup_{1 \leq k} \|\underline{x}_e(1)\| . \tag{A6.35}$$

Berücksichtigt man, daß für asymptotisch stabile Systeme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\underline{\Gamma}(k)\| \leq \tilde{c}_1 \tag{A6.36}$$

für alle k ist, so folgt aus Gl.(A6.35) direkt Gl.(A6.30), was zu beweisen war.

Entsprechend Lemma A6.1 und Gln.(3.2) und (3.33) existieren für ein asymptotisch stabiles Korrekturnetzwerk positive Konstanten $c_2$ und $c_3$ derart, daß

$$\|\underline{y}_K(k)\| \leq c_2 + c_3 \sup_{l \leq k} \|\underline{u}_{dI}(l)\| \tag{A6.37}$$

ist. Nach Gln.(3.5a) und (3.33) folgt

$$\underline{u}_{dI}(z) = z^{\bar{d}_e} \underline{B}_E^{-1}(z^{-1}) \underline{D}_a^{-1}(z^{-1}) [\underline{A}_E(z^{-1})(1-z^{-1})^{n_z+1} \underline{y}_E(z) + \underline{A}_K(z) \underline{v}(z)]. \tag{A6.38}$$

Ist Gl.(3.7) erfüllt, so existieren wiederum nach Lemma A6.1 unter Berücksichtigung der Kommutativität der Matrixprodukte $\underline{D}_a^{-1}(z^{-1}) \underline{A}_E(z^{-1})$ und $\underline{D}_a^{-1}(z^{-1}) \underline{A}_K(z^{-1})$ sowie der Dreiecksungleichung positive Konstanten $c_4$ und $c_5$ derart, daß

$$\|\underline{u}_{dI}(k)\| \leq c_4 + c_5 \left(\sup_{l \leq k} \|\underline{y}_{ED}(l)\| + \sup_{l \leq k} \|\underline{v}_D(l)\|\right) \tag{A6.39}$$

mit

$$\underline{y}_{ED}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{z^{\bar{d}_e} \underline{D}_a^{-1}(z^{-1}) \underline{y}_E(z)\} \tag{A6.40a}$$

und

$$\underline{v}_D(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{z^{\bar{d}_e} \underline{D}_a^{-1}(z^{-1}) \underline{v}_D(z)\} \tag{A6.40b}$$

gilt. Für beschränkte Störungen kann der Störterm durch eine Konstante

$$\|\underline{v}_D(k)\| \leq c_6 \text{ für alle } k \tag{A6.41}$$

abgeschätzt werden. Aus den Ungleichungen (A6.28), (A6.37), (A6.39) und (A6.41) läßt sich für den Gesamtsignalvektor die Abschätzung

$$\|\underline{x}(k)\| \leq c_7 + c_8 \sup_{1 \leq k} \|\underline{y}_{ED}(1)\| \tag{A6.42}$$

mit

$$c_7 \geq (c_0 + c_1 c_3)(c_4 + c_5 c_6) + c_1 c_2 \tag{A6.43a}$$

$$c_8 \geq c_5 \ (c_0 + c_1 c_3) + c_1 \tag{A6.43b}$$

gewinnen.

Nach Gl.(3.8) und der Dreiecksungleichung folgt, daß

$$\|\underline{y}_{ED}(k)\| \leq \|\underline{y}_{MD}(k)\| + \|\underline{e}_D(k)\| \tag{A6.44}$$

ist, wobei $\underline{y}_{MD}$ und $\underline{e}_D$ als

$$\underline{y}_{MD}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{z^{\bar{d}_e} \underline{D}_a^{-1}(z^{-1}) \ \underline{y}_M(z)\} \tag{A6.45a}$$

$$\underline{e}_D(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{z^{\bar{d}_e} \underline{D}_a^{-1}(z^{-1}) \ \underline{e}(z)\} \tag{A6.45b}$$

definiert sind. Für ein asymptotisch stabiles Parallelmodell ist $\underline{y}_M$ und damit auch $\underline{y}_{MD}$ mit

$$\|\underline{y}_{MD}(k)\| \leq c_9 \text{ für alle } k \tag{A6.46}$$

beschränkt. Aufgrund der Beziehung

$$\underline{e}_D(z) = \underline{A}_M^{-1}(z^{-1}) \ \underline{e}_{MD}(z) \tag{A6.47}$$

mit $\underline{e}_{MD}$ nach Gl.(4.57c), die aus Gl.(4.20) folgt, existieren bei stabilem Parallelmodell nach Lemma A6.1 Konstanten $c_{10}$ und $c_{11}$, so daß

$$\|\underline{e}_D(k)\| \leq c_{10} + c_{11} \sup_{1 \leq k} \|\underline{e}_{MD}(1)\| \tag{A6.48}$$

ist.

Aus den Gln.(A6.42), (A6.44), (A6.46) und (A6.48) ergibt sich Gl. (4.57b) mit

$$c_0 \geq c_7 + c_8(c_9 + c_{10})$$

$$c_1 \geq c_8 c_{11} .$$

## A 6.2.2. Beweis der Beschränktheit der Signalvektoren und der Konvergenz der gefilterten und vermehrten Fehler im ungestörten System

Entsprechend den Herleitungen aus Anhang A6.1, speziell Gl.(A6.24), gilt für das adaptive Regelungssystem mit dem Algorithmus nach Gln.(4.48) bis (4.55b) im störungsfreien Fall

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\bar{e}_i^2(k)}{\rho_i \; \underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a) \; \underline{G}_i \; \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) + \gamma_i} = 0 ;$$

$$i = 1, \ldots, q \qquad \text{(A6.49)}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{Mi}^2(k)}{\rho_i \; \underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a) \; \underline{G}_i \; \underline{x}_i(k-d_e-d_i^a) + \gamma_i} = 0 ;$$

$$i = 1, \ldots, q . \qquad \text{(A6.50)}$$

(Mit $\delta = \bar{d}_e + d_i^a$ und $\nu = 1$ geht für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ Gl.(A6.24) unter Berücksichtigung von Gl.(4.47) mit $v_i(k) \equiv 0$ für das ungestörte System in Gl.(A6.49) über; mit $\nu = \bar{d}_e + d_i^a + 1$ folgt unter Berücksichtigung von Gl.(4.26) direkt Gl.(A6.50).) Mit $\lambda_{max}(\underline{G}_i)$ wird der größte Eigenwert der positiv definiten Matrix $\underline{G}_i$ bezeichnet. Für jedes Paar von positiven Konstanten (A,B) mit den Eigenschaften

$$A \geq \max_{1\leq i\leq q} \{\rho_i \; \lambda_{max}(\underline{G}_i)\} \qquad \text{(A6.51a)}$$

$$B \geq \max_{1\leq i\leq q} \{\gamma_i\} \qquad \text{(A6.51b)}$$

gilt dann

$$\frac{e_{Mi}^2(k+\bar{d}_e+d_i^a)}{A\,\underline{x}^T(k)\,\underline{x}(k)+B} \leq \frac{e_{Mi}^2(k+\bar{d}_e+d_i^a)}{\rho_i\,\underline{x}_i^T(k)\,\underline{G}_i\,\underline{x}_i(k)+\gamma_i}\;;$$

$$i = 1, \ldots, q\,. \qquad \text{(A6.52)}$$

In Gl.(A6.52) kennzeichnet $\underline{x}$ (ohne Index i) wiederum den Gesamtsignalvektor nach Gl.(4.57a). Aus Gln.(A6.52) und (A6.50) folgt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{Mi}^2(k+\bar{d}_e+d_i^a)}{A\,\underline{x}^T(k)\,\underline{x}(k)+B} = 0\,; \quad i = 1, \ldots, q\,. \qquad \text{(A6.53)}$$

Da Gl.(A6.53) für alle $i \in \{1,\ldots,q\}$ gilt, ergibt sich, daß auch

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{q} e_{Mi}^2(k+\bar{d}_e+d_i^a)}{A\,\underline{x}^T(k)\,\underline{x}(k)+B} = 0\,; \quad i = 1, \ldots, q \qquad \text{(A6.54)}$$

ist. Mit Gl.(4.57c) folgt ferner

$$\sum_{i=1}^{q} e_{Mi}^2(k+\bar{d}_e+d_i^a) = \underline{e}_{MD}^T(k)\,\underline{e}_{MD}(k)\,. \qquad \text{(A6.55)}$$

Mit der Normdefinition

$$\|\,a\,\| = \underline{a}^T\,\underline{a}$$

für einen beliebigen Vektor $\underline{a}$ erhält man (mit Gl.(A6.55)) aus Gl. (A6.54)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|\underline{e}_{MD}(k)\|}{A\|\underline{x}(k)\|+B} = 0\,. \qquad \text{(A6.56)}$$

Wie bereits in Abschnitt 4.2 erörtert, können aufgrund der Beschränheit der Parameterfehlervektoren die Signale $\underline{x}_i$ entsprechend Gl. (4.56) und damit auch die gefilterten Fehler nur exponentiell anwachsen. Damit folgt für den Vektor $\underline{e}_{MD}$ nach Gl.(4.57c) die zusätzliche Bedingung

$$\|\underline{e}_{MD}(k)\| \leq M_e \lambda_e^k, \tag{A6.57}$$

wobei $M_e > 0$ und $\lambda_e > 0$ geeignete Konstanten sind. Dann gilt

Lemma A6.2. (vgl. Goodwin et al. (1980)):
Aus der Gültigkeit der Ungleichungen (4.57b) und (A6.57) und Gleichung (A6.56) folgt:

$$\|\underline{x}(k)\| \leq M_x < \infty \text{ für alle } k \tag{A6.58}$$

$$\lim_{k\to\infty} \|\underline{e}_{MD}(k)\| = 0 . \tag{A6.59}$$

Beweis (durch Widerspruch): Mit Gl.(4.57b) ergibt sich

$$\frac{\|\underline{e}_{MD}(k)\|}{A\,C_0 + B + A\,C_1 \sup\limits_{1\leq k} \|\underline{e}_{MD}(1)\|} \leq \frac{\|\underline{e}_{MD}(k)\|}{A\|\underline{x}(k)\| + B} . \tag{A6.60}$$

Nun wird angenommen, $\underline{e}_{MD}$ *divergiert* für $k \to \infty$. Dann folgt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sup\limits_{1<k} \|\underline{e}_{MD}(1)\|}{\|\underline{e}_{MD}(k)\|} = 1, \text{ falls } \|\underline{e}_{MD}(k)\| \to \infty \text{ für } k \to \infty . \tag{A6.61}$$

Somit erhält man weiterhin

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|\underline{e}_{MD}(k)\|}{A\,C_0 + B + A\,C_1 \sup\limits_{1\leq k} \|\underline{e}_{MD}(1)\|} = \frac{1}{A\,C_1} > 0 ,$$

$$\text{falls } \|\underline{e}_{MD}(k)\| \to \infty \text{ für } k \to \infty . \tag{A6.62}$$

Nach Gln.(A6.60) und (A6.56) muß aber gelten:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|\underline{e}_{MD}(k)\|}{A\,C_0 + B + A\,C_1 \sup\limits_{1\leq k} \|\underline{e}_{MD}(1)\|} = 0 , \tag{A6.63}$$

was nach Gl.(A6.62) im Widerspruch zu der Annahme der Divergenz des Vektors $\underline{e}_{MD}$ steht. Der Vektor $\underline{e}_{MD}$ ist also beschränkt, d. h.

$$\|\underline{e}_{MD}(k)\| \leq M_e < \infty \text{ für alle } k . \tag{A6.64}$$

Mit Gl.(4.57b) folgt aus Gl.(A6.64) direkt die Beschränktheit des Gesamtsignalvektors $\underline{x}$ entsprechend Gl.(A6.58). Aus Gln.(A6.56) und (A6.58) wiederum erhält man auch Gl.(A6.59), was zu beweisen war.

Aus der Beschränktheit des Gesamtsignalvektors $\underline{x}$ entsprechend Gl. (A6.58) folgt aus seiner Definition nach Gl.(4.57c) direkt die Beschränktheit der Signalvektoren $\underline{x}_i$ mit

$$\|\underline{x}_i(k)\| \leq M_{xi} < \infty \text{ für alle } k; \quad i = 1, \ldots, q . \tag{A6.65}$$

Mit Gl.(A6.65) ergeben sich aus den Gln.(A6.49) und (A6.50) direkt die Konvergenz der vermehrten und gefilterten Fehler nach Gln. (4.58a) und (4.58b). Gl.(4.58b) erhält man auch aus Gl.(A6.55) und Gl.(A6.58).

# Anhang A7

## Beweis von Satz 4.4

Satz 4.4 kann mit Hilfe der Wurzelortskurvenmethode bewiesen werden (Schwarz (1968)). Dazu werden auch die Funktionen $\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})$ in ihrer faktorisierten Form

$$\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1}) = K_{Ei} \frac{\prod_{l=1}^{n(\bar{B}^{(i-1)}_{ETi,i})} (1 - \beta_{Eil} z^{-1})}{\prod_{l=1}^{n(\bar{A}^{(i-1)}_{ETi,i})} (1 - \alpha_{Eil} z^{-1})}; \quad i = 1, \ldots, q \tag{A7.1}$$

dargestellt. Die Wurzeln der linken Seiten von Gl.(3.99) und Gl. (3.107), die außerhalb des Einheitskreises der z-Ebene liegen, sind unter den gemachten Voraussetzungen ebenfalls Nullstellen der Funktionen

$$H_i(z^{-1}) = 1 + H_{oi}(z^{-1}); \quad i = 1, \ldots, q \tag{A7.2a}$$

mit

$$H_{oi}(z^{-1}) = \frac{\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})}{\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})} = \frac{\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})\, \bar{A}^{(i-1)}_{ETi,i}(z^{-1})}{\bar{A}_{Ki,i}(z^{-1})\, \bar{B}^{(i-1)}_{ETi,i}(z^{-1})}; \quad i = 1, \ldots, q \tag{A7.2b}$$

bzw.

$$H_{oi}(z^{-1}) = \frac{K_{Ki}}{K_{Ei}} \frac{\prod_{l=1}^{n(\bar{B}_{Ki,i})} (1 - \beta_{Kil} z^{-1}) \prod_{l=1}^{n(\bar{A}^{(i-1)}_{ETi,i})} (1 - \alpha_{Eil} z^{-1})}{\prod_{l=1}^{n(\bar{A}_{Ki,i})} (1 - \alpha_{Kil} z^{-1}) \prod_{l=1}^{n(\bar{B}^{(i-1)}_{ETi,i})} (1 - \beta_{Eil} z^{-1})};$$

$$i = 1, \ldots, q\,. \tag{A7.2c}$$

Da die Polynomprodukte

$$\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})\ \bar{A}_{ETi,i}^{(i-1)}(z^{-1}) \text{ und } \bar{A}_{Ki,i}(z^{-1})\ \bar{B}_{ETi,i}^{(i-1)}\ (z^{-1})$$

nach den Voraussetzungen und der ersten Bedingung von Satz 4.2 bei stabilem Korrekturnetzwerk, d. h. stabilen Übertragungsfunktionen $\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})$, keine gemeinsamen Teiler mit Wurzeln außerhalb oder auf dem Rand des Einheitskreises haben, sind die Stabilitätsbedingungen Gl.(3.99) und Gl.(3.107) erfüllt, falls gilt

$$H_i(z^{-1}) \neq 0 \text{ für alle } |z| \geq 1; \quad i = 1, \ldots, q\,. \tag{A7.3}$$

Mit den Größen

$$M_i = \max\{n(\bar{B}_{Ki,i}) + n(\bar{A}_{ETi,i}^{(i-1)}),\ n(\bar{A}_{Ki,i}) + n(\bar{B}_{ETi,i}^{(i-1)})\};$$

$$i = 1, \ldots, q \tag{A7.4}$$

und

$$m_i = [n(\bar{B}_{Ki,i}) + n(\bar{A}_{ETi,i}^{(i-1)})] - [n(\bar{A}_{Ki,i}) + n(\bar{B}_{ETi,i}^{(i-1)})];$$

$$i = 1, \ldots, q, \tag{A7.5}$$

folgt aus Gl.(A7.2c) nach Erweiterung mit $z^{M_i}$

$$H_{oi}(z^{-1}) = H_{oi}(z) =$$

$$= \frac{K_{Ki}}{K_{Ei}} \frac{\prod_{l=1}^{n(\bar{B}_{Ki,i})} (z - \beta_{Kil}) \prod_{l=1}^{n(\bar{A}_{ETi,i}^{(i-1)})} (z - \alpha_{Eil})}{\prod_{l=1}^{n(\bar{A}_{Ki,i})} (z - \alpha_{Kil}) \prod_{l=1}^{n(\bar{B}_{ETi,i}^{(i-1)})} (z - \beta_{Eil})} z^{m_i};$$

$$i = 1, \ldots, q\,. \tag{A7.6}$$

Die Funktionen $H_{oi}(z)$ nach Gl.(A7.6) haben die Standardform, wie sie für das Wurzelortskurvenverfahren benötigt wird (Schwarz (1968)

Die Lage der Nullstellen der Funktionen $H_i(z^{-1})$ nach Gl.(A7.2a) in der z-Ebene ist dann durch die Beziehung

$$H_i(z) = 1 + H_{oi}(z) = 0; \quad i = 1, \ldots, q \tag{A7.7}$$

bestimmt.

Abhängig vom Vorzeichen von $m_i$ nach Gl.(A7.4) hat für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ die Funktion $H_{oi}(z)$ $m_i$ Polstellen ($m_i < 0$) oder $m_i$ Nullstellen ($m_i > 0$) bei $z = 0$. Zähler- und Nennergrad (in z) von $H_{oi}(z)$ sind beide gleich $M_i$, so daß der Gradunterschied zwischen Zähler und Nenner von $H_{oi}(z)$ gleich Null ist. Dies bedeutet, daß kein Ast der in Abhängigkeit von den Vorfaktoren $K_{Ki}$ der Einzelübertragungsfunktionen $\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})$ des Korrekturnetzwerkes gezeichneten Wurzelortskurven von Gl.(A7.6) im Unendlichen endet. Für $m_i > 0$ laufen für $|K_{Ki}| \to \infty$ $m_i$ Äste auf den Ursprung $z = 0$ zu, von den übrigen $[n(\bar{B}_{Ki,i}) + n(\bar{A}^{(i-1)}_{ETi,i})]$ Ästen endet jeweils einer in einer Wurzel $\beta_{Kil}$ des Polynoms $B_{Ki,i}(z^{-1})$ bzw. $\alpha_{Eil}$ des Polynoms $\bar{A}^{(i-1)}_{ETi,i}(z^{-1})$. Die erste Bedingung von Satz 4.4 gewährleistet dann mit der vorausgesetzten Stabilität der Funktionen $\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})$ (d. h. $|\alpha_{Eil}| < 1$ für alle i und l), daß für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ für $|K_{Ki}| \to \infty$ *höchstens ein Ast* auf dem Rand des Einheitskreises bei $z = 1$ und alle anderen Äste *innerhalb* des Einheitskreises der z-Ebene enden.

Besitzen die Polynome $\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})$ eine Nullstelle bei $z = 1$, so legt die zweite Bedingung, Gl.(4.92), für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ das Vorzeichen des Vorfaktors $K_{Ki}$ so fest, daß jener Ast, der für $|K_{Ki}| \to \infty$ auf den Punkt $z = 1$ zuläuft, sich diesem Punkt von "links", d. h. auf der positiv reellen Achse mit $Re\{z\} < 1$, $Im\{z\} = 0$ nähert und somit auch für große Beträge des Vorfaktors $K_{Ki}$ innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene liegt. Dies ergibt sich aus einer einfachen Überlegung. Ein Abschnitt der positiv reellen Achse innerhalb des Einheitskreises links vom Punkt $z = 1$ ist für jedes $i \in \{1,\ldots,q\}$ genau dann Wurzelort von Gl.(A7.1), wenn entweder der Quotient $K_{Ki}/K_{Ei} > 0$ *und* die Gesamtzahl der auf der Halbgeraden

$$Re\{z\} \geq 1, \quad Im\{z\} = 0 \tag{A7.8}$$

liegenden Pol- und Nullstellen $\beta_{Kil}$, $\beta_{Eil}$ und $\alpha_{Eil}$ von $H_{oi}(z)$ (vgl. Gl.(A7.6) *ungerade* ist, oder aber wenn der Quotient $K_{Ki}/K_{Ei} < 0$ *und* die Gesamtzahl der auf der Halbgeraden nach Gl.(A7.7) liegenden Pol- und Nullstellen $\beta_{Kil}$, $\beta_{Eil}$, $\alpha_{Kil}$ und $\alpha_{Eil}$ *gerade* ist. Laut den Voraussetzungen und der 1. Bedingung von Satz 4.1 liegt genau eine Nullstelle $\beta_{Kil}$ der Funktion $\bar{G}_{Kdi,i}(z^{-1})$ bei $z = 1$. Nimmt man nun an, daß $\mu_i$ ($\mu_i \in \{0,1,2,3,\ldots\}$) Nullstellen der Übertragungsfunktion $\bar{G}_{EdTi,i}^{(i-1)}(z^{-1})$ auf der positiv reellen Achse außerhalb des Einheitskreises der z-Ebene, d. h. auf der Halbgeraden $Re\{z\} > 1$, $Im\{z\} = 0$ liegen, so ist die Gesamtzahl der auf dem durch Gl.(A7.8) beschriebenen Abschnitt der positiv reellen Achse liegenden Pol- und Nullstellen von $H_{oi}(z)$ gleich $\mu_i + 1$. Damit ein links an den Punkt $z = 1$ angrenzender Abschnitt der positiv reellen Achse innerhalb des Einheitskreises Wurzelort ist, muß demnach die Vorzeichenbedingung

$$\operatorname{sgn}(K_{Ki}/K_{Ei}) = (-1)^{\mu_i}; \quad i = 1, \ldots, q$$

bzw.

$$\operatorname{sgn}(K_{Ki}) = (-1)^{\mu_i} \operatorname{sgn}(K_{Ei}); \quad i = 1, \ldots, q \tag{A7.9}$$

gelten. Entsprechend Gl.(A7.1) erhält man den Vorfaktor $K_{Ei}$ aus der Beziehung

$$K_{Ei} = \bar{G}_{EdTi,i}^{(i-1)}(1) \frac{\prod_{l=1}^{n(\bar{A}_{ETi,i}^{(i-1)})} (1 - \alpha_{Eil})}{\prod_{l=1}^{n(\bar{B}_{ETi,i}^{(i-1)})} (1 - \beta_{Eil})}; \quad i = 1, \ldots, q. \tag{A7.10}$$

Ist eine Wurzel $\alpha_{Eil}$ oder $\beta_{Eil}$ komplex, so existiert auch die dazu konjugiert komplexe Wurzel. Für alle konjugiert komplexen Zahlenpaare $\sigma \pm j\omega$ gilt aber

$$(1 - \sigma + j\omega)(1 - \sigma - j\omega) = (1 - \sigma)^2 + \omega^2 \geq 0; \tag{A7.11}$$

für reelle Zahlen $\sigma$ gilt

$$1-\sigma>0 \quad \text{für } \sigma<1 \tag{A7.12a}$$

$$1-\sigma<0 \quad \text{für } \sigma>1\,. \tag{A7.12b}$$

Somit wird das Vorzeichen von $K_{Ei}$ entsprechend Gl.(A7.10) unter den Voraussetzungen nach Satz 4.4 bestimmt durch das Vorzeichen des Verstärkungsfaktors $\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(1)$ und der Anzahl $\mu_i$ der Nullstellen $\beta_{Eil}$ der Übertragungsfunktion $\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(z^{-1})$, die auf der positiv reellen Achse außerhalb des Einheitskreises der z-Ebene liegen, für die also gilt $\beta_{Eil}>1$. Damit folgt aus Gl.(A7.10)

$$\operatorname{sgn}(K_{Ei}) = \operatorname{sgn}(\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(1))\ (-1)^{\mu_i};\quad i=1,\ldots,q\,. \tag{A7.13}$$

Setzt man Gl.(A7.13) in Gl.(A7.9) ein, so ergibt sich

$$\operatorname{sgn}(K_{Ki}) = (-1)^{2\mu_i}\ \operatorname{sgn}(\bar{G}^{(i-1)}_{EdTi,i}(1));\quad i=1,\ldots,q\,. \tag{A7.14}$$

Da $(-1)^{2\mu_i}=1$ für beliebige (natürliche) Zahlen $\mu_i$ ist, ist Gl. (A7.14) mit Gl.(4.92) identisch.

Liegen *alle* Wurzeln der Polynome $\bar{B}_{Ki,i}(z^{-1})$ für $i\in\{1,\ldots,q\}$ *innerhalb* des Einheitskreises der z-Ebene, so spielt das Vorzeichen der Vorfaktoren $K_{Ki}$ für die Stabilität, d. h. für die Bedingungen nach Gl.(3.99) und Gl.(3.107), keine Rolle, da dann für $K_{Ki}\to\infty$ alle Äste der Wurzelortskurven von Gl.(A7.7) *innerhalb* (und nicht auf dem Rand) des Einheitskreises enden.

Aus den vorangegangenen Überlegungen ergibt sich, daß alle Äste der Wurzelortskurven für die Nullstellen von $H_i(z)$ nach Gl.(A7. 7 ) bzw. $H_i(z^{-1})$ nach Gl.(A7.2a) der Voraussetzung und den zwei Bedingungen von Satz 4.2 für $|K_{Ki}|\to\infty$ für jedes $i\in\{1,\ldots,q\}$ im Einheitskreis der z-Ebene liegen. Wählt man somit $|K_{Ki}|$ groß genug, so haben die Funktionen $H_i(z^{-1})$ keine Nullstellen außerhalb des Einheitskreises der z-Ebene; d. h. es existiert für jedes $i\in\{1,\ldots,q\}$ eine Schranke $M_{Ki}$, so daß für alle

$$|K_{Ki}|>M_{Ki};\quad i=1,\ldots,q$$

Gl.(A7.3) erfüllt ist. Damit ist Satz 4.4 bewiesen.

# Anhang A8

## Zur Bestimmung der Parameter der Regelstrecke mit Hilfe der adaptiv eingestellten Reglerparameter

Die in den Vektoren $\hat{\underline{p}}_i$ nach Gl.(4.23) für $i \in \{1,\ldots,q\}$ zusammengefaßten Reglerparameter sind die Schätzwerte der exakten Parametervektoren $\underline{p}_i$ nach Gl.(4.22) und Gl.(4.7). Diese Vektoren werden aus den Koeffizienten $b_{ij0}$ der Matrix $\underline{B}_0$ nach Gl.(4.4), $e_{ijl}$ der Polynome $E_{ij}(z^{-1})$, die in der Polynommatrix $\underline{E}(z^{-1})$ nach Gl.(4.5) zusammengefaßt sind, und den Koeffizienten $s_{Iil}$ der Polynome $S_{Ii}(z^{-1})$ (vgl. Gl.(2.92)), d. h. den Diagonalelementen der Matrix $\underline{S}_I(z^{-1})$, gebildet. Gelingt es nun, die Streckenparameter als Funktionen der Matrizen $\underline{B}_0$, $\underline{E}(z^{-1})$ und $\underline{S}_I(z^{-1})$ darzustellen, können sie mit Hilfe der adaptiv eingestellten Parameter leicht bestimmt werden, indem die exakten Matrizen durch die aus den Schätzwerten $\hat{\underline{p}}_i$ der Reglerparameter zu bildenden Matrizen $\hat{\underline{B}}_0$, $\hat{\underline{E}}(z^{-1})$ und $\hat{\underline{S}}_I(z^{-1})$ ersetzt werden.

Schreibt man Gl.(2.92) in Matrixform, so erhält man

$$\underline{\Delta A}_I^*(z^{-1}) = z^{-\bar{d}_e+1}\, \underline{D}_a(z^{-1})\, \underline{S}_I(z^{-1}) + \underline{R}_I(z^{-1})\, \underline{A}_I(z^{-1}) \qquad \text{(A8.1)}$$

mit

$$\underline{\Delta A}_I^*(z^{-1}) = \mathrm{diag}\{\Delta A_{Ii}^*(z^{-1})\};\ i = 1, \ldots, q\,. \qquad \text{(A8.2)}$$

Aus Gl.(2.93) ergibt sich die Matrizengleichung

$$\underline{\Delta A}_I^*(z^{-1}) = \underline{A}_I^*(z^{-1}) - \underline{A}_M^*(z^{-1}) \qquad \text{(A8.3)}$$

mit

$$\underline{A}_I^*(z^{-1}) = \mathrm{diag}\{A_{Ii}^*(z^{-1})\};\ i = 1, \ldots, q\,. \qquad \text{(A8.4)}$$

Mit Gl.(2.87a) und Gl.(2.38a) folgt

$$\underline{A}_I(z^{-1}) - \underline{A}_M(z^{-1}) = \underline{\Delta A}^*_I(z^{-1})\ z^{-1}. \tag{A8.5}$$

Mit Gl.(A8.5) erhält man aus Gl.(A8.1)

$$\underline{A}_I(z^{-1}) - \underline{A}_M(z^{-1}) = z^{-1}\ [z^{-\bar{d}_e+1}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{S}_I(z^{-1}) + \underline{R}_I(z^{-1})\ \underline{A}_I(z^{-1})]. \tag{A8.6}$$

Aus Gl.(A8.6) ergibt sich mit

$$\underline{A}_I(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^{n_z+1}\ \underline{A}(z^{-1}) \tag{2.87a}$$

die Beziehung

$$(1 - z^{-1})^{n_z+1}\ [\underline{I} - \underline{R}_I(z^{-1})\ z^{-1}]\ \underline{A}(z^{-1})$$
$$= \underline{A}_M(z^{-1}) + z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{S}_I(z^{-1}). \tag{A8.7}$$

Nun gilt nach Gl.(4.2)

$$\underline{R}_I(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1}) = \underline{E}(z^{-1}) + \underline{B}^*(z^{-1}). \tag{A8.8}$$

Multipliziert man Gl.(A8.7) von rechts mit $\underline{A}^{-1}(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})$ und subtrahiert auf beiden Seiten $(1 - z^{-1})^{n_z+1}\ \underline{B}_0$, so erhält man

$$(1 - z^{-1})^{n_z+1}\ [\underline{B}(z^{-1}) - \underline{E}(z^{-1})\ z^{-1} - \underline{B}_0 - \underline{B}^*(z^{-1})\ z^{-1}]$$
$$= [\underline{A}_M(z^{-1}) + z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{S}_I(z^{-1})]\ \underline{A}^{-1}(z^{-1})\ \underline{B}(z^{-1})$$
$$- (1 - z^{-1})^{n_z+1}\ \underline{B}_0\ . \tag{A8.9}$$

Mit der Abkürzung

$$\underline{A}_{SI}(z^{-1}) = \underline{A}_M(z^{-1}) + z^{-\bar{d}_e}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \underline{S}_I(z^{-1}), \tag{A8.10}$$

ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl.(2.22b) aus Gl.(A8.9)

$$(1 - z^{-1})^{n_z+1} \; [\underline{B}_0 - \underline{E}(z^{-1}) \; z^{-1}] = \underline{A}_{SI}(z^{-1}) \; \underline{A}^{-1}(z^{-1}) \; \underline{B}(z^{-1}). \tag{A8.11}$$

Aus Gl.(A8.7) folgt ferner mit Gl.(A8.10)

$$(1 - z^{-1})^{n_z+1} \; [\underline{I} - \underline{R}_I(z^{-1}) \; z^{-1}] \; \underline{A}(z^{-1}) = \underline{A}_{SI}(z^{-1}). \tag{A8.12}$$

Da die linke Seite von Gl.(A8.12) den Faktor $(1 - z^{-1})^{n_z+1}$ erhält, muß dieser Faktor auch in der rechten Seite enthalten sein. Das bedeutet, daß man $\underline{A}_{SI}(z^{-1})$ in

$$\underline{A}_{SI}(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^{n_z+1} \; \underline{A}_S(z^{-1}) \tag{A8.13}$$

zerlegen kann. Damit folgt aus Gl.(A8.11)

$$\underline{A}^{-1}(z^{-1}) \; \underline{B}(z^{-1}) = \underline{A}_S^{-1}(z^{-1}) \; [\underline{B}_0 - \underline{E}(z^{-1}) \; z^{-1}]. \tag{A8.14}$$

Da $\underline{R}_I(z^{-1})$ und $\underline{A}(z^{-1})$ Diagonalmatrizen sind, gilt dies nach Gl. (A8.12) auch für $\underline{A}_{SI}(z^{-1})$ und somit nach Gl.(A8.13) auch für $\underline{A}_S(z^{-1})$. Nach Multiplikation mit $\underline{D}_a(z^{-1})$ von links und $\underline{D}_e(z^{-1})$ von rechts und anschließendem Vertauschen der Diagonalmatrizen $\underline{A}(z^{-1})$ und $\underline{D}_a(z^{-1})$ bzw. $\underline{A}_S(z^{-1})$ und $\underline{D}_a(z^{-1})$ folgt mit

$$\underline{G}(z^{-1}) = \underline{A}^{-1}(z^{-1}) \; \underline{D}_a(z^{-1}) \; \underline{B}(z^{-1}) \; \underline{D}_e(z^{-1}) \tag{2.16}$$

aus Gl.(A8.14)

$$\underline{G}(z^{-1}) = \underline{A}_S^{-1}(z^{-1}) \; \underline{D}_a(z^{-1}) \; [\underline{B}_0 - \underline{E}(z^{-1})] \; \underline{D}_e(z^{-1}). \tag{A8.15}$$

Damit ist eine Darstellung der Regelstrecke in Abhängigkeit der in den Matrizen $\underline{B}_0$, $\underline{E}(z^{-1})$ und $\underline{S}_I(z^{-1})$ zusammengefaßten Reglerparameter und der Matrix $\underline{A}_M(z^{-1})$ des Parallelmodells gegeben. Mit Hilfe der Schätzwerte für die Reglerparameter erhält man dann das geschätzte Streckenmodell

$$\hat{\underline{G}}(z^{-1}) = \hat{\underline{A}}_S^{-1}(z^{-1}) \; \underline{D}_a(z^{-1}) \; [\hat{\underline{B}}_0 - \hat{\underline{E}}(z^{-1})] \; \underline{D}_e(z^{-1}) \tag{A8.16a}$$

mit

$$\hat{\underline{A}}_S(z^{-1}) = \frac{1}{(1-z^{-1})^{n_z+1}} \left[\underline{A}_M(z^{-1}) + z^{-\bar{d}_e}\, \underline{D}_a(z^{-1})\, \hat{\underline{S}}_I(z^{-1})\right] \tag{A8.16b}$$

(vgl. Gln.(A8.10) und (A8.13)).

Man beachte, daß aus Gl.(A8.14) *nicht* folgt

$$\underline{A}(z^{-1}) = \underline{A}_S(z^{-1}) \text{ und}$$

$$\underline{B}(z^{-1}) = \underline{B}_O - \underline{E}(z^{-1}).$$

Dies liegt daran, daß der Regler den durch Gl.(A8.1) beschriebenen Prädiktor (vgl. Abschnitt 2.2.4) implizit enthält, der zu einer Ordnungserhöhung führt. Nach Gl.(2.92) und Gl.(A1.7) liegt die minimale Ordnung der Polynome $R_{Ii}(z^{-1})$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$) durch die Beziehung

$$n_{min}(R_{Ii}) = \bar{d}_e + d_i^a - 2; \quad i = 1, \ldots, q$$

fest. Demnach gilt nach Gl.(4.2)

$$n(E_{ij}) = n(B_{ij}) - 1 + \bar{d}_e + d_i^a; \quad i,j = 1, \ldots, q\,. \tag{A8.17}$$

D. h. die in der Zählermatrix $[\underline{B}_O - \underline{E}(z^{-1})\, z^{-1}]$ enthaltenen Polynome haben im allgemeinen einen höheren Grad als die Polynome der Matrix $\underline{B}(z^{-1})$. Dasselbe gilt dann auch für die Nennermatrix $\underline{A}_S(z^{-1})$ bezogen auf die Matrix $\underline{A}(z^{-1})$. Bei der Produktbildung nach Gl.(A8.14) treten dann auf der rechten Seite gemeinsame Teiler auf, die auf der linken Seite nicht vorhanden sind. Ob diese Teiler allerdings auch bei dem mit Hilfe der geschätzten Parameter des Reglers bestimmten Matrixpolynomprodukt $\hat{\underline{A}}_S(z^{-1})\, [\hat{\underline{B}}_O - \hat{\underline{E}}(z^{-1})\, z^{-1}]$ numerisch zu erkennen sind, ist aufgrund des im Abschnitt 4.3.1 behandelten Identifikationsproblems nicht gesichert und dürfte praktisch wohl kaum der Fall sein. Dasselbe gilt auch für den Faktor $(1-z^{-1})^{n_z+1}$, der ja nach Gl.(A8.16b) theoretisch zwar in der

auch mit den geschätzten Reglerwerten gebildeten Matrix $\underline{A}_M(z^{-1}) + z^{-\bar{d}_e-1}\ \underline{D}_a(z^{-1})\ \hat{\underline{S}}_I(z^{-1})$ enthalten sein muß, numerisch aber sehr schwer zu separieren ist.

Nur in dem Fall, in dem

$$\bar{d}_e = 0 \quad \text{und}$$

$$d_i^a = 1 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, q$$

ist und dann $\underline{R}_I(z^{-1}) \equiv 0$ gewählt wird, gilt nach Gl.(4.2)

$$\underline{E}(z^{-1}) = -\underline{B}^*(z^{-1}). \tag{A8.18}$$

Dann folgt nach Gl.(2.22b) auch

$$\begin{aligned} \underline{B}_0 - \underline{E}(z^{-1})\ z^{-1} &= \underline{B}_0 + \underline{B}^*(z^{-1})\ z^{-1} \\ &= \underline{B}(z^{-1}). \end{aligned} \tag{A8.19}$$

Ist diese Matrix $\underline{B}(z^{-1})$ invertierbar, d. h. ist die Regelstrecke entkoppelbar, dann gilt nach Gl.(A8.14) in diesem Fall auch

$$\underline{A}_S(z^{-1}) = \underline{A}(z^{-1}). \tag{A8.20}$$

Unkritisch hingegen ist die Bestimmung der Verstärkungsmatrix $\underline{G}(1)$ der Regelstrecke, insbesondere dann, wenn ein Regler ohne explizites I-Verhalten ($n_z = -1$) eingesetzt wird. Dann gilt nach Gln.(A8.16a,b) für den Schätzwert der Verstärkungsmatrix

$$\begin{aligned} \hat{\underline{G}}(1) &= \hat{\underline{A}}_S^{-1}(1)\ [\hat{\underline{B}}_0 - \hat{\underline{E}}(1)] \\ &= [\underline{A}_M(1) + \hat{\underline{S}}_I(1)]^{-1}\ [\hat{\underline{B}}_0 - \hat{\underline{E}}(1)]. \end{aligned} \tag{A8.21}$$

# Anhang A 9

## Eine modifizierte Realisierung des adaptiven Reglers nach Abschnitt 4.2.

In diesem Anhang wird eine modifizierte Realisierung des adaptiven Reglers behandelt, die sich eng an die für Eingrößensysteme vorgeschlagene Methode von Ionescu und Monopoli (1977) und Schmid (1979) anlehnt, und sich im wesentlichen nur durch die Berechnung der Matrix $\hat{\underline{B}}_O$ von dem Verfahren in Abschnitt 4.2 unterscheidet. Dazu wird von der Gleichung des natürlichen Fehlervektors, Gl. (4.18), ausgegangen. Zerlegt man diese Gleichung zeilenweise, so ergibt sich für jeden gefilterten Fehler $e_{Mi}$ ($i \in \{1,\ldots,q\}$) unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.20), (4.9), (4.12) und (2.22c)

$$\begin{aligned} e_{Mi}(k) = {} & \mu_i(k - \bar{d}_e - d_i^a) - (b_{iiO} + b'_{KiiO}) u_{dIi}(k - \bar{d}_e - d_i^a) \\ & - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q} (b_{ijO} + b'_{KijO}) u_{dIj}(k - \bar{d}_e - d_i^a) \\ & + \underline{\bar{p}}_i^T \underline{\bar{x}}_i(k - \bar{d}_e - d_i^a) + v_i(k); \quad i=1,\ldots,q \end{aligned} \tag{A 9.1}$$

wobei mit $b_{ijO}$ der Elemente der Matrix $\underline{B}_O$ und mit $b'_{KijO}$ die Elemente der Matrix $\underline{B}'_{KO}$ bezeichnet werden. Im folgenden werden die Abkürzungen

$$\beta_{ijO} = b_{ijO} + b'_{KijO}; \quad i,j = 1,\ldots,q \tag{A 9.2}$$

verwendet.

Mit den Hilfssignalen

$$x_{Hi}(k-1) = \hat{\tilde{p}}_{iO}(k-1)\mu_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q} \hat{\tilde{p}}_{ij}(k-1)u_{dIj}(k-\bar{d}_e-d_i^a) + \hat{\tilde{p}}_{i,q+1}^T(k-1)\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) - u_{dIi}(k-\bar{d}_e-d_i^a)\ ;\ i=1,\ldots,q \qquad \text{(A 9.3)}$$

folgt aus Gl.(A 9.1), indem auf beiden Seiten der Term $\beta_{iiO}\, x_{Hi}(k-1)$ subtrahiert wird:

$$e_{Mi}(k) - \beta_{iiO}x_{Hi}(k-1) = (1-\beta_{iiO}\hat{\tilde{p}}_{iO}(k-1))\mu_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q} (\beta_{ijO}-\beta_{iiO}\hat{\tilde{p}}_{ij}(k-1))u_{dIj}(k-\bar{d}_e-d_i^a) + (\bar{\underline{p}}_i^T-\beta_{iiO}\hat{\tilde{\underline{p}}}_{i,q+1}^T(k-1))\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) + v_i(k);$$

$$i=1,\ldots,q \qquad \text{(A 9.4)}$$

Die Parameter $\hat{\tilde{p}}_{iO},\ldots,\hat{\tilde{p}}_{iq}$ und $\hat{\tilde{p}}_{i,q+1}$ stellen - wie sich später zeigen wird - in diesem Fall die Reglerparameter dar.
Mit den Signalen

$$h_i(k) = -\hat{p}_{Hi}(k-1)x_{Hi}(k-1);\ i=1,\ldots,q, \qquad \text{(A 9.5)}$$

wobei mit $\hat{p}_{Hi}$ Hilfsparameter bezeichnet werden, ergeben sich nach Addition des Ausdrucks $(\beta_{iiO}-p_{Hi}(k-1))x_{Hi}(k-1)$ aus Gl.(A 9.4) die vermehrten Fehler

$$\bar{e}_i(k) = e_{Mi}(k) + h_i(k) = (1-\beta_{iiO}\tilde{p}_{iO}(k-1))\mu_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q} (\beta_{ijO}-\beta_{iiO}\hat{\tilde{p}}_{ij}(k-1)v_{dIj}(k-\bar{d}_e-d_i^a) + (\bar{\underline{p}}_i^T-\beta_{iiO}\hat{\tilde{\underline{p}}}_{i,q+1}^T(k-1))\bar{\underline{x}}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) + (\beta_{iiO}-\hat{p}_{Hi}(k-1))x_{Hi}(k-1) + v_i(k);\ i=1,\ldots,q \qquad \text{(A 9.6)}$$

Definiert man nun die Parametervektoren

$$\underline{p}_i^T = [1, -\beta_{i10}, \ldots, -\beta_{i,i-1,0}, \beta_{i,i+1,0}, \ldots, \beta_{iq0}, \underline{\bar{p}}_i^T, \beta_{ii0}]\ ;$$
$$i=1,\ldots,q, \qquad \text{(A 9.7)}$$

die Schätzwerte

$$\hat{\underline{p}}_i^T(k) = [\beta_{ii0}\hat{\tilde{p}}_{i0}(k),\ \beta_{ii0}\hat{\tilde{p}}_{i1}(k), \ldots,\ \beta_{ii0}\hat{\tilde{p}}_{i,i-1}(k),$$
$$\beta_{ii0}\hat{\tilde{p}}_{i,i+1}(k), \ldots,\ \beta_{ii0}\hat{\tilde{p}}_{iq}(k),\ \beta_{ii0}\hat{\underline{\tilde{p}}}^T_{i,q+1}(k),\ \hat{p}_{Hi}(k)];$$
$$i=1,\ldots,q, \qquad \text{(A 9.8)}$$

und die Signalvektoren

$$\underline{x}_i^T(k) = [\mu_i(k),\ u_{dI1}(k), \ldots, u_{dIi-1}(k),\ u_{dIi+1}(k), \ldots,$$
$$u_{dIq}(k),\ \underline{\bar{x}}_i^T(k),\ x_{Hi}(k + \bar{d}_e + d_i^a - 1)];\ i=1,\ldots,q,$$
$$\text{(A 9.9)}$$

so ergibt sich aus Gl.(A 9.6)

$$\bar{e}_i(k) = [\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k-1)]^T \underline{x}_i(k - \bar{d}_e - d_i^a) + v_i(k);\ i=1,\ldots,q$$
$$\text{(A 9.10)}$$

Gl.(A 9.10) ist *mathematisch formal* mit Gl.(4.47) identisch, lediglich die physikalische Bedeutung der einzelnen Parametervektoren bzw. ihre Schätzwerte ist unterschiedlich.
Die weitere Analyse der hier behandelten Version des adaptiven Reglers wird nur für den störungsgreien Fall mit

$$v_i(k) \equiv 0\ ;\ i=1,\ldots,q \qquad \text{(A 9.11)}$$

durchgeführt. Für das gestörte System gelten die Ergebnisse aus Abschnitt 4.4 entsprechend. Wendet man den Adaptionsalgorithmus nach Gln.(4.48) für die Einstellung der Parameter $\hat{\underline{p}}_i$ an, so ist nach Satz 4.1 im störungsfreien Fall die Konvergenz der vermehrten Fehler garantiert. Allerdings ist man nicht an diesen Parametern, sondern an $\hat{\tilde{p}}_{i0}, \ldots, \hat{\underline{\tilde{p}}}_{i,q+1}$ und $\hat{p}_{Hi}$ interessiert. Um direkt hierfür Schätzwerte zu bekommen, werden die Bewertungsmatrizen $\underline{G}_i$ in der Form

$$\underline{G}_i = \left[\begin{array}{c|c} \underline{G}_i' & \underline{0} \\ \hline \underline{0}^T & g_{Hi} \end{array}\right] \; ; \; i=1,\ldots,q \qquad \text{(A 9.12a)}$$

mit

$$\underline{G}_i' = \underline{G}_i'^T > 0 \; ; \; i=1,\ldots,q \qquad \text{(A 9.12b)}$$

$$g_{Hi} > 0 \; ; \; i=1,\ldots,q \qquad \text{(A 9.12c)}$$

angesetzt und die Parameter $\tilde{p}_{i0}$ bis $\underline{\tilde{p}}_{i,q+1}^T$ zum Vektor

$$\hat{\underline{\tilde{p}}}_i'^T(k) = [\hat{\tilde{p}}_{i0}(k), \hat{\tilde{p}}_{i1}(k),\ldots, \hat{\tilde{p}}_{i,i-1}(k), \hat{\tilde{p}}_{i,i+1}(k),\ldots, \hat{\tilde{p}}_{iq}(k), \hat{\underline{\tilde{p}}}_{i,q+1}^T(k)] \; ; \; i=1,\ldots,q \qquad \text{(A 9.13)}$$

zusammengefaßt. Mit Gl.(A 9.13) und Gl.(A 9.8) folgt

$$\hat{\underline{p}}_i^T(k) = [\beta_{ii0}\hat{\underline{\tilde{p}}}_i'^T(k), \hat{p}_{Hi}(k)]; \; i=1,\ldots,q. \qquad \text{(A 9.14)}$$

Bezeichnet man mit $\underline{x}_i'$ jenen Teil des Signalvektors $\underline{x}_i$, der nicht von dem Hilfssignal $x_{Hi}$ abhängt, d.h.

$$\underline{x}_i^T(k) = [\underline{x}_i'^T(k), x_{Hi}(k+\bar{d}_e+d_i^a-1] \; ; \; i=1,\ldots,q \qquad \text{(A 9.15)}$$

so erhält man aus Gl.(4.48) unter Berücksichtigung von Gl.(A 9.14) und Gl.(A 9.12a)

$$\hat{\underline{\tilde{p}}}_i'(k) = \hat{\underline{\tilde{p}}}_i'(k-1) + r_i(k)\underline{G}_{\beta i}'\underline{x}_i'(k-\bar{d}_e-d_i^a)\bar{e}_i(k); \quad i=1,\ldots,q \qquad \text{(A 9.16a)}$$

mit

$$\underline{G}_{\beta i}' = \frac{1}{\beta_{ii0}}\underline{G}_i' \; ; \; i=1,\ldots,q \qquad \text{(A 9.16b)}$$

und

$$\hat{p}_H(k) = \hat{p}_H(k-1) + r_i(k)g_{Hi}x_{Hi}(k-1)\bar{e}_i(k); \; i=1,\ldots,q. \qquad \text{(A 9.17)}$$

Es wird vorausgesetzt, daß für alle Parameterkombinationen der Regelstrecke die Koeffizienten $\beta_{ii0} \neq 0$ sind, nicht ihr Vorzeichen wechseln und dieses a priori bekannt ist. Statt $\underline{G}_i'$ werden dann direkt die Bewertungsmatrizen $\underline{G}_{\beta i}'$ nach den Bedingungen

$$\underline{G}_{\beta i}' = \underline{G}_{\beta i}'^{T} \; ; \; i=1,\ldots,q \tag{A 9.18a}$$

$$\operatorname{sgn}(\beta_{ii0})\underline{G}_{\beta i}' > 0 \; ; \; i=1,\ldots,q \tag{A 9.18b}$$

vorgegeben. Dann ist nach Gl.(A 9.16b) auch die Bedingung nach Gl. (A 9.12b) erfüllt und für positive $g_{Hi}$ sind somit die effektiven Bewertungsmatrizen $\underline{G}_i$ positiv definit, wie es in Gl.(4.50) gefordert wird.

Mit Gl.(A 9.12a), Gl.(A 9.15) und Gl.(A 9.16b) folgt aus Gl.(4.49)

$$\frac{1}{r_i^*(k)} = \frac{\lambda_{1i}(k)}{r_i(k-1)} + \lambda_{2i}(k)\beta_{ii0}\underline{x}_i'^{T}(k-\bar{d}_e-d_i^a)\underline{G}_{\beta i}'\underline{x}_i'^{T}(k-\bar{d}_e-d_i^a)$$
$$+ \lambda_{2i}(k)g_{Hi}x_{Hi}^2(k-1) + \lambda_{3i}(k); \; i=1,\ldots,q\,. \tag{A 9.19}$$

Da $\beta_{ii0}$ unbekannt ist, kann $r_i^*(k)$ nicht direkt nach Gl.(A 9.19) berechnet werden. Um eine berechenbare Form dieser Faktoren zu finden, mit der die Konvergenz der vermehrten Fehler garantiert wird, wird noch einmal auf den Stabilitätsbeweis von Satz 4.1 nach Anhang A 6 zurückgegriffen. Ein entscheidender Punkt dieses Beweises besteht in der Ungleichung (A 6.8), durch die letztendlich entsprechend Gl.(A 6.9) die negative Definitheit des Gradienten $\Delta V(k)$ der Ljapunow-Funktion nach Gl.(A 6.1) gewährleistet wird. Genügen somit die Faktoren $r_i(k)$ der Ungleichung

$$0 < \alpha_i \leq 2 - r_i(k)\underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\underline{G}_i\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a); \quad i=1,\ldots,q\,, \tag{A 9.20}$$

so bleibt mit der Ljapunow-Funktion nach Gl.(A 6.1) der Stabilitätsbeweis nach Anhang A 6 auch für die hier behandelte Modifikation des adaptiven Reglers gültig und die Konvergenz der vermehrten Fehler ist garantiert, falls $r_i(k)$ zusätzlich durch eine untere Schranke

nach Art von Gl.(4.54) begrenzt wird. Gl.(A 9.20) ist stets durch die Wahl

$$\frac{1}{r_i(k)} \geq \frac{1}{2}\,\lambda_{maxG_i}\,\underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a);\ i=1,\ldots,q \tag{A 9.21}$$

zu erfüllen, wobei $\lambda_{maxG_i}$ den größten Eigenwert der positiv definiten Bewertungsmatrix $\underline{G}_i$ kennzeichnet. Diese Matrix hängt allerdings für jedes $i\in\{1,\ldots,q\}$ von der vorgegebenen Matrix $\underline{G}'_{\beta i}$ nach Gl.(A 9.16b) in unbekannter Weise ab, da der Koeffizient $\beta_{iiO}$ nicht bekannt ist. Nun kann aber praktisch immer für die Beträge der Koeffizienten $\beta_{iiO}$ in Abhängigkeit von den Reglerparametern $b_{iiO}$ und den Parametern $b_{KiiO}$ des Korrekturnetzwerkes eine obere Schranke mit

$$0 \leq |\beta_{iiO}| \leq \beta_{iiO,max} \tag{A 9.22}$$

angegeben werden. Aus den Gleichungen (A 9.12a) und (A 9.16b) folgt

$$\lambda_{maxG_i} \leq \max\{|\lambda_{maxG'_{\beta i}}|\beta_{iiO,max},\ g_{Hi}\};\ i=1,\ldots,q, \tag{A 9.23}$$

wobei $|\lambda_{maxG'_{\beta i}}|$ den betragsmäßig größten Eigenwert der Matrix $\underline{G}'_{\beta i}$ bezeichnet. Gl.(A 9.21) ist damit sicher durch folgenden Algorithmus erfüllt:

$$\frac{1}{r_i^*(k)} = \frac{\lambda_{1i}(k)}{r_i(k-1)} + \lambda_{2\beta i}(k)\underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) + \lambda_{3i}(k);$$

$$i=1,\ldots,q \tag{A 9.24}$$

$$0 \leq \lambda_{1i}(k) \leq \bar{\lambda}_{1i};\ i=1,\ldots,q \tag{A 9.25}$$

$$\tfrac{1}{2}\max\{|\lambda_{maxG'_{\beta i}}|\beta_{iiO,max},\ g_{Hi}\} < \lambda_{2\beta i}(k) \leq \bar{\lambda}_{2\beta i};$$

$$i=1,\ldots,q \tag{A 9.26}$$

$$0 \leq \lambda_{3i}(k) \leq \bar{\lambda}_{3i};\ i=1,\ldots,q \tag{A 9.27}$$

Entsprechend der Ljapunow-Funktion nach Gl.(A 6.1) garantieren die Gleichungen (A 9.24) bis (A 9.27) zunächst nur

$$\lim_{k\to\infty} r_i(k)\bar{e}_i^2(k) = 0; \quad i=1,\ldots,q$$

(vgl. Gl.(A 6.17)). Um daraus auf die Konvergenz der vermehrten Fehler zu schließen, müssen die Faktoren $r_i(k)$ nach unten durch

$$r_i(k) = \begin{cases} r_i^*(k) \text{ falls } r_i^*(k) \geq \dfrac{1}{\rho_{\beta i}\underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)+\gamma_i} \\ \dfrac{1}{\rho_{\beta i}\underline{x}_i^T(k-\bar{d}_e-d_i^a)\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)} \text{ sonst} \end{cases}$$

$$i=1,\ldots,q \qquad \text{(A 9.28)}$$

mit

$$\rho_{\beta i} > \frac{1}{2}\max\{|\lambda_{\max G'_{\beta i}}|\beta_{ii0,\max}, g_{Hi}\}; \; i=1,\ldots,q \qquad \text{(A 9.29a)}$$

$$\gamma_i \geq 0; \; i=1,\ldots,q \qquad \text{(A 9.29b)}$$

begrenzt werden. Der Beweis der Konvergenz der vermehrten Fehler vollzieht sich jetzt analog zu Gl.(A6.18) bis (A6.24).

Der Adaptionsalgorithmus nach Gln.(A 9.16a), (A 9.17), (A 9.18a,b), (A 9.12c) und (A 9.24) bis (A 9.29) garantiert somit unter der Voraussetzung nach Gl.(A 9.22) die Konvergenz der vermehrten Fehler gegen Null.
Es muß jetzt noch die Konvergenz der gefilterten Fehler $e_{Mi}$ erreicht werden. Dies geschieht durch Wahl eines geeigneten Stellgesetzes, über das bisher ja noch keine Aussagen gemacht worden sind. Da der Beweis der Konvergenz vollkommen analog zu Anhang A 6 erfolgt und damit unter Verwendung derselben Ljapunow-Funktion nach Gl. (A 6.1) zu denselben Aussagen bezüglich ihres Gradienten führt, folgt auch, daß bei dieser Version des Reglers

1. die Parameterfehler $[\underline{p}_i - \hat{\underline{p}}_i(k)]$ monoton abnehmen (vgl. Gl.(A 6.14)),
2. die Schätzwerte $\hat{\underline{p}}_i(k)$ beschränkt sind und gegen konstante Werte konvergieren (vgl. Gln.(A 6.11) und (4.38)) und

3. $\lim_{k\to\infty} [\underline{p}_i - \underline{\hat{p}}_i(k-\nu)]^T \underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a) = 0$ für alle (ganzzahligen) $\nu$;

$i=1,\ldots,q$ (A 9.30)

ist (vgl. Gl.(4.44)).

Legt man nun dem Stellgesetz die Beziehung

$$u_{dIi}(k) = \hat{\tilde{p}}_{i0}(k-1)u_i(k) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{q} \hat{\tilde{p}}_{ij}(k-1)u_{dj}(k) + \underline{\hat{\tilde{p}}}_{i,q+1}^T(k-1)\underline{\bar{x}}_i(k$$

$i=1,\ldots,q$ (A 9.31)

zugrunde, so folgt aus Gl.(A 9.3) unter Berücksichtigung von Gln. (A 9.7), (A 9.8) und (A 9.9)

$$x_{Hi}(k-1) = [\underline{\hat{p}}_i(k-1) - \underline{\hat{p}}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a-1)]^T\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)$$
$$- [\underline{\hat{p}}_{Hi}(k-1) + \underline{\hat{p}}_{Hi}(k-\bar{d}_e-d_i^a-1)]\underline{x}_{Hi}(k-1). \quad \text{(A 9.32)}$$

Addiert und subtrahiert man auf der rechten Seite von Gl.(A 9.32) den Term $\underline{p}_i^T\underline{x}_i(k-\bar{d}_e-d_i^a)$, so folgt mit Gl.(A 9.30) aus Gl.(A 9.32)

$$\lim_{k\to\infty}[1+\hat{p}_{Hi}(k)-\hat{p}_{Hi}(k-\bar{d}_e-d_i^a+1)]x_{Hi}(k) = 0;\ i=1,\ldots,q.$$
(A 9.33)

Da $\hat{p}_{Hi}$ beschränkt ist und gegen einen *konstanten* Wert $p_{Hi}^*$ konvergiert, ergibt sich aus Gl.(A 9.33)

$$\lim_{k\to\infty} x_{Hi}(k) = 0; \quad i=1,\ldots,q$$

und aus Gl.(A 9.5)

$$\lim_{k\to\infty} h_i(k) = 0\ ;\ i=1,\ldots,q. \quad \text{(A 9.34)}$$

Mit Gl.(A 9.34) und der Konvergenz der vermehrten Fehler erhält man aus Gl.(A 9.6) direkt die Konvergenz der gefilterten Fehler $e_{Mi}$. Der Nachweis der Stabilität des gesamten adaptiven Regelungssystems erfolgt jetzt mit derselben Argumentation wie in Abschnitt 4.2.

Das Stellgesetz aus Gl.(A 9.31) enthält in dieser Form noch algebraische Schleifen und wird zur Realisierung in der Vektor-Matrix-Form

$$\underline{B}_O(k-1)\underline{u}_{dI}(k) = \underline{\varphi}(k) \qquad \text{(A 9.35)}$$

mit

$$\hat{\underline{B}}_O(k-1) = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\tilde{p}}_{12}(k-1) & \hat{\tilde{p}}_{13}(k-1) & \dots & \hat{\tilde{p}}_{1q}(k-1) \\ \hat{\tilde{p}}_{21}(k-1) & 1 & \hat{\tilde{p}}_{23}(k-1) & \dots & \hat{\tilde{p}}_{2q}(k-1) \\ \hat{\tilde{p}}_{31}(k-1) & \hat{\tilde{p}}_{32}(k-1) & 1 & \dots & \hat{\tilde{p}}_{3q}(k-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\tilde{p}}_{q1}(k-1) & \hat{\tilde{p}}_{q2}(k-1) & \hat{\tilde{p}}_{q3}(k-1) & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(A 9.36a)}$$

$$\underline{\varphi}^T(k) = [\varphi_1(k),\ \varphi_2(k)\ \dots,\ \varphi_q(k)] \qquad \text{(A 9.36b)}$$

$$\varphi_i(k) = \hat{\tilde{p}}_{iO}(k-1)\mu_i(k) + \hat{\underline{\tilde{p}}}^T_{i,q+1}(k-1)\bar{\underline{x}}_i(k);\ i=1,\dots,q \qquad \text{(A 9.36c)}$$

dargestllt. Zur Berechnung des Signals $\underline{u}_{dI}(k)$ aus Gl.(A 9.35) muß die Invertierbarkeit der Matrix $\underline{B}_O(k)$ in jedem Abtastschritt gewährleistet sein, was durch Wahl der Matrix $\underline{B}'_{KO}$ des Korrekturnetzwerkes auch in diesem Fall stets garantiert werden kann.

Obwohl die hier betrachtete Version des adaptiven Reglers gegenüber der aus Abschnitt 4.2 eine etwas andere mathematische Behandlung erfordert, sind die physikalischen Unterschiede gering. Im angepaßten Zustand sind beide Regler gleich. Auch der Adaptionsalgorithmus ist der gleiche mit denselben Eigenschaften. Der Unterschied besteht nur in dem Aufbau der Matrix $\hat{\underline{B}}_O$ die in dieser Version zusätzlich (implizit) die Matrix $\underline{B}'_{KO}$ enthält, und in der Schätzung der Parameter $\hat{\tilde{p}}_{iO}$, mit denen die Signale $\mu_i$ verknüpft werden.

# Anhang A 10

## Mathematische Notation

### A 10.1. Grundsätzliche Bemerkungen

Vektoren werden mit kleinen unterstrichenen Buchstaben gekennzeichnet. Dies gilt auch für Vektoren, die die z-Transformierten von Signalgrößen darstellen. Die Unterscheidung, ob es sich um Größen im Frequenzbereich oder im Zeitbereich handelt, wird durch das Argument z (Frequenzbereich) bzw. k (Zeitbereich) deutlich. Es gilt z.B. $\underline{y}(z) = \mathfrak{Z}\{\underline{y}(k)\}$

Matrizen werden mit großen unterstrichenen Buchstaben gekennzeichnet. Die Elemente der Matrix haben grundsätzlich dasselbe Formelzeichen einschließlich aller Indizes und sonstigen Sonderzeichen wie die Matrix selbst, zu der sie gehören. Zusätzlich kommen zwei Indizes i,j hinzu, die die Position des Elementes in der Matrix festlegen.Bei Diagonalmatrizen wird für die Position auf der Hauptdiagonalen nur ein Index verwendet. Die Koeffizienten von Polynomen die selbst wiederum Elemente von Polynommatrizen sind, werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet und sind dreifach indiziert, falls die Matrix voll besetzt ist, und zweifach indiziert, falls es sich um eine Diagonalmatrix handelt. Die ersten beiden Indizes bzw. bei Diagonalmatrizen der erste Index beschreiben die Position des Polynoms innerhalb der Polynommatrix, zu dem der Koeffizient gehört. Der letzte Index gibt die Potenz des Arguments $z^{-1}$ des Polynoms an, mit der der Koeffizient verbunden ist. So hat z.B. die vollbesetzte Matrix $\underline{B}_K(z^{-1})$ die Elemente

$$\underline{B}_K(z^{-1}) = \{B_{Ki,j}(z^{-1})\} \quad ,$$

und für die Polynome $B_{Ki,j}(z^{-1})$ gilt

$$B_{Ki,j}(z^{-1}) = \sum_{l=0}^{n(B_{Ki,j})} b_{Ki,j,l} z^{-l} \quad ;$$

für die Diagonalmatrix $\underline{A}_M(z^{-1})$ folgt z.B.

$$\underline{A}_M(z^{-1}) = \mathrm{diag}\{A_{Mi}(z^{-1})\}$$

$$A_{Mi}(z^{-1}) = 1 + \sum_{l=1}^{n(A_{Mi})} a_{Mil} z^{-l} .$$

Die Funktion n(.) eines Polynoms kennzeichnet den Grad des Polynoms.

## A 10.2. Zusammenstellung der wichtigsten Formelzeichen

### Signale

| | |
|---|---|
| $\underline{e} = [e_1,\ldots,e_q]^T$ | natürlicher Fehlervektor |
| $\underline{e}_M = [e_{M1},\ldots,e_{Mq}]^T$ | gefilterter Fehlervektor |
| $\underline{e}_M(z) = \underline{A}_M(z^{-1})\ \underline{e}(z)$ | |
| $\bar{e}_i$ | vermehrter Fehler nach Gl.(4.46) |
| h | Signal zur Vermehrung des Fehlers nach Gl.(4.45) |
| $\underline{r}_\varepsilon$<br>$\underline{r}_\varepsilon(z) = \underline{A}^{-1}(z^{-1})\underline{C}(z^{-1})\underline{\varepsilon}(z)$ | Vektor farbiger Rauschsignale |
| $\underline{s}$ | meßbarer Störvektor |
| $\underline{s}_d(z) = z^{\bar{d}_e}\underline{D}_{se}(z^{-1})\underline{s}(z)$ | vom meßbaren Störvektor |
| $\underline{s}_{dI}(z) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\underline{s}_d(z)$ | abgeleitete Hilfsvektoren |
| $\underline{u}$ | Stellvektor |
| $\underline{u}_I(z) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\underline{u}(z)$<br>$\underline{u}_d(z) = z^{\bar{d}_e}\underline{D}_e(z^{-1})\underline{u}(z)$<br>$\underline{u}_{dI}(z) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\underline{u}_d(z)$ | vom Stellvektor abgeleitete Hilfsvektoren |

$\underline{v}$ — Störvektor der internen Systemstörungen des geschlossenen Kreises

$$\underline{v}(z) = -[\underline{I}-\underline{R}(z^{-1})z^{-1}]\cdot [\underline{C}(z^{-1})\underline{\varepsilon}(z)+\underline{z}(z)]$$

$\underline{w}$ — Sollwertvektor

$\underline{w}_V = \underline{G}_V(z^{-1})\underline{w}(z)$ — gefilterter Sollwertvektor

$\underline{x}$ — Signalvektor allgemein

$\underline{Y}$ — Vektor der Regelgrößen

$\underline{Y}_E$ — Ausgangsvektor der erweiterten Regelstrecke

$\underline{Y}_K$ — Ausgangsvektor des Korrekturnetzwerkes

$\underline{Y}_M$ — Ausgangsvektor des Parallelmodells

$\underline{z}$ — Vektor der deterministischen Störungen

$$\underline{z}_I(z) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\underline{z}(z)$$

$\underline{\varepsilon}$ — Vektor weißer Rauschsignale

$$\underline{\varepsilon}_I(z) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\underline{\varepsilon}(z)$$

$\underline{\mu}$ — Signalvektor nach Gl.(4.1)

Polynom- und Übertragungsmatrizen

$$\underline{A}(z^{-1}) = \underline{I} + \underline{A}^*(z^{-1})z^{-1} = \mathrm{diag}\{A_i(z^{-1})\}$$

Diagonalmatrix der Zeilenhauptnenner der Regelstrecke

$\underline{A}_E(z^{-1})$ — Diagonalmatrix der (Zeilenhaupt-) Nenner der erweiterte Regelstreck

$$\underline{A}_I(z^{-1}) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\underline{A}(z^{-1}) = \underline{I} + \mathrm{diag}\{\Delta A^*_{Ii}(z^{-1})\}z^{-1}$$

$\underline{A}_K(z^{-1}) = \underline{I} + \underline{A}_K^*(z^{-1})z^{-1}$
$= \text{diag}\{A_{Ki}(z^{-1})\}$

Diagonalmatrix für die (Zeilenhaupt-) Nenner des Korrekturnetzwerks

$\underline{A}_M(z^{-1}) = \underline{I} + \underline{A}_M^*(z^{-1})z^{-1}$
$= \text{diag}\{A_{Mi}(z^{-1})\}$

Diagonalmatrix für die (Zeilenhaupt-) Nenner des Parallelmodells

$\underline{\Delta A}^*(z^{-1}) = \underline{A}^*(z^{-1}) - \underline{A}_M^*(z^{-1})$

Diagonalmatrix

$\underline{\Delta A}_K^*(z^{-1}) = \underline{A}_K^*(z^{-1}) - \underline{A}_M^*(z^{-1})$

Diagonalmatrix

$\underline{B}(z^{-1}) = \underline{B}_O + \underline{B}^*(z^{-1})z^{-1}$

Matrix der (erweiterten) Zählerpolynome der Regelstrecke (vgl. Abschnitt 2.1)

$\underline{B}_E(z^{-1})$

Matrix der Zählerpolynome der erweiterten Regelstrecke

$\underline{B}_K(z^{-1}) = (1-z^{-1})^{n_z+1}\underline{B}'_K(z^{-1})$
$= \underline{B}_{KO} + \underline{B}_K^*(z^{-1})z^{-1}$

Matrix der Zählerpolynome des Korrekturnetzerks

$\underline{B}'_K(z^{-1}) = \underline{B}'_{KO} + \underline{B}'^*_K(z^{-1})z^{-1}$

$\underline{B}_M(z^{-1})$

Matrix der Zählerpolynome des Parallelmodells

$\underline{C}(z^{-1}) = \underline{I} + \underline{C}^*(z^{-1})z^{-1}$
$= \text{diag}\{C_i(z^{-1})\}$

Störpolynommatrix (vgl. Bild 2.3)

$\underline{D}_a(z^{-1}) = \text{diag}\{z^{-d_i^a}\}$

Matrix der ausgangsseitigen Schrittverzögerungen der Regelstrecke (vgl. Abschnitt 2.1)

$\underline{D}_e(z^{-1}) = \text{diag}\{z^{-d_i^e}\}$

Matrix der eingangsseitigen Schrittverzögerungen der Regelstrecke

$\underline{E}(z^{-1}) = -\underline{B}^*(z^{-1}) + \underline{R}_I(z^{-1})\underline{B}(z^{-1})$

Polynommatrix

$$\underline{G}(z^{-1}) = \underline{A}^{-1}(z^{-1})\underline{D}_a(z^{-1})\cdot \underline{B}(z^{-1})\underline{D}_e(z^{-1})$$

$$= \{\frac{\bar{B}_{ij}(z^{-1})}{\bar{A}_{ij}(z^{-1})} z^{-d_{ij}}\}$$

Übertragungsmatrix der Regelstrecke von $\underline{y}(z)$ nach $\underline{u}(z)$

$$\underline{G}_d(z^{-1}) = \underline{A}^{-1}(z^{-1})\underline{D}_a(z^{-1})\cdot \underline{B}(z^{-1})z^{-\bar{d}_e}$$

Übertragungsmatrix der Regelstrecke von $\underline{y}(z)$ nach $\underline{u}_d(z)$

$$\bar{\underline{G}}_d(z^{-1}) = \{\bar{G}_{dij}(z^{-1})\} = \{\frac{\bar{B}_{ij}(z^{-1})}{\bar{A}_{ij}(z^{-1})}\} = \underline{A}^{-1}(z^{-1})\underline{B}(z^{-1})$$

Matrix der Übertragungsfunktionen der Regelstrecke ohne Berücksichtigung der Schrittverzögerungen

$$\underline{G}_K(z^{-1}) = \underline{A}_K^{-1}\underline{D}_a(z^{-1})\cdot \underline{B}_K(z^{-1})\underline{D}_e(z^{-1})$$

Übertragungsmatrix des Korrekturnetzwerkes von $\underline{y}_K(z)$ nach $\underline{u}(z)$

$$\underline{G}_{Kd}(z^{-1}) = \underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\underline{D}_a(z^{-1})\cdot \underline{B}_K(z^{-1})z^{-\bar{d}_e}$$

Übertragungsmatrix des Korrekturnetzwerkes von $\underline{y}_K(z)$ nach $\underline{u}_d(z)$

$$\bar{\underline{G}}_{Kd}(z^{-1}) = \underline{A}_K^{-1}(z^{-1})\underline{B}_K(z^{-1})$$

Matrix der Übertragungsfunktionen des Korrekturnetzwerks ohne Berücksichtigung der Schrittverzögerungen

$\underline{G}_V(z^{-1})$ Übertragungsmatrix des Vorfilters

$\underline{R}(z^{-1})$, $\underline{S}(z^{-1})$ Diagonalmatrizen, die die "Prädiktor"-Gleichung

$$z^{\bar{d}_e-1}\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\underline{\Delta A}^*(z^{-1}) = \underline{S}(z^{-1}) + \underline{R}(z^{-1})z^{\bar{d}_e-1}\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\underline{A}(z^{-1})$$

erfüllen

$\underline{R}_I(z^{-1})$, $\underline{S}_I(z^{-1})$ Diagonalmatrizen, die die "Prädiktor"-Gleichung

$$z^{\bar{d}_e-1}\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\underline{\Delta A}_I^*(z^{-1}) =$$

$$= \underline{S}_I(z^{-1})+\underline{R}_I(z^{-1})z^{\bar{d}_e-1}\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\underline{A}_I(z^{-1})$$

erfüllen.

$\underline{S}_K(z^{-1})$, $\underline{R}_K(z^{-1})$ Diagonalmatrizen, die die Gleichung

$$z^{\bar{d}_e-1}\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\underline{\Delta A}_K^*(z^{-1}) =$$

$$= \underline{S}_K(z^{-1})+\underline{R}_K(z^{-1})z^{\bar{d}_e-1}\underline{D}_a^{-1}(z^{-1})\underline{A}_K(z^{-1})$$

erfüllen.

Sonstige wichtige Formelzeichen

| | |
|---|---|
| $d_{ij}$ | Schrittverzögerungen |
| $d_i^a$ | ausgangsseitige Schrittverzögerungen der Regelstrecke |
| $d_i^e$ | eingangsseitige Schrittverzögerungen der Regelstrecke |
| $\bar{d}_e = \max_{1\le i\le q}\{d_i^e\}$ | maximale eingangsseitige Schrittverzögerung |
| $\underline{G}_i = \underline{G}_i^T$ | positiv definite Bewertungsmatrizen nach Gl.(4.50) |
| $\underline{I}$ | Einheitsmatrix |
| i,j | Positionsindizes |
| k | Zeitvariable |
| n(.) | Grad;<br>n(P): Grad des Polynoms $P(z^{-1})$ |

| | |
|---|---|
| $n_{zi}$ | maximale stationäre Steigung im Zeitbereich der Störung $z_i$ |
| $n_z$ | maximale stationäre Steigung im Zeitbereich aller Störungen und Sollwerte |
| $\underline{p}$ | Parametervektor |
| $\hat{\underline{p}}$ | Schätzwert des Parametervektors |
| $q$ | Anzahl der Ein- und Ausgangsgrößen der Regelstrecke |
| $r_i$ | rekursiv nach Gln.(4.49) und (4.54) berechnete Faktoren des Adaptionsalgorithmus |
| $V$ | Ljapunow-Funktion |
| $\lambda_{1i}$, $\lambda_{2i}$, $\lambda_{3i}$ | Gewichtungsfaktoren nach Gln.(4.51) bis (4.53) des Adaptionsalgorithmus' |
| $\rho_i$, $\gamma_i$ | Faktoren nach Gln. (4.55a,b) zur Einstellung einer unteren Schranke für $r_i$ nach Gl.(4.54) |

Mathematische Abkürzungen

| | |
|---|---|
| $\underline{A} > 0$ | positiv definite Matrix $\underline{A}$ |
| adj $\underline{A}$ | Adjungierte von $\underline{A}$ |
| $\underline{A}^T$ | Transponierte von $\underline{A}$ |
| det $\underline{A}$ | Determinante von $\underline{A}$ |
| dim($\underline{x}$) | Dimension von $\underline{x}$ |
| E{x(k)} | Erwartungswert von x |
| $\Delta\underline{x}(k) = \underline{x}(k)-\underline{x}(k-1)$ | Inkrement bzw. (diskreter) Gradient von $\underline{x}(k)$ |
| $\|x\|$ | Betrag von x |
| $\|\|x\|\|$ | Norm von x |
| $\hat{\cdot}$ | Schätzwert |

Volker Hahn

## LEBENSLAUF

| | |
|---|---|
| 9.4.1954 | geboren in Dortmund als Sohn des Wilfried Hahn und seiner Frau Hannelore, geb. Moronga |
| 1960 - 1964 | Besuch der Busenbergschule in Dortmund-Berghofen |
| 1964 - 1968 | Besuch des Humboldt-Gymnasiums in Dortmund |
| 1968 - 1972 | Besuch des neu gegründeten Phoenix-Gymnasiums in Dortmund-Hörde, naturwissenschaftlicher Zweig |
| Mai 1972 | Abitur |
| Juni - August 1972 | Grundlagenpraktikum bei der Hoesch Hüttenwerke AG in Dortmund |
| 1972 - 1978 | Studium der Elektrotechnik an der Ruhr-Universität Bochum |
| Februar - April 1975<br>April - Mai 1976 | Fachpraktikum bei der Hoesch Hüttenwerke AG in Dortmund |
| Januar 1978 | Diplom |
| Mai 1978 - August 1979 | Zivildienst in den Bodelschwinghschen Anstalten Bethel, Bielefeld |
| Seit Oktober 1979 | Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung an der Ruhr-Universität Bochum |

Bochum, im Oktober 1983